School Algebra



(iv) भाग का चिन्ह **(Sign of Division)**— '÷' इस चिन्ह को भाग का चिन्ह कहते हैं, और यह चिन्ह यदि दो अङ्कों के बीच में रखा जाय तो यह सूचित करेगा कि बाईं ओर लिखे हुए अङ्क को दाहिनी ओर के अङ्क से ा देना होगा। जैसे $x \div y$ द्वारा सूचित होता है कि 'x' द्वारा सूचित अङ्क में ारा सूचित अङ्क से भाग देना होगा। और $x \div y \div z$ द्वारा सूचित होता कि x द्वारा सूचित अङ्क में y द्वारा सूचित अङ्क से भाग करके भागफल z द्वारा सूचित अङ्क से भाग देना होगा।

नोट—1. सुविधा के लिए $x \div y$ को $\frac{x}{y}$ द्वारा सूचित करते हैं। x को अंश *(numerator)* और y को हर *(denominator)* कहते हैं।

2. $\frac{x}{y}$ की इस परिभाषा से वही समझा जाता है जो अङ्कगणित के भिन्न ा समझा जाता है। इसलिए साधारण भिन्न के जोड़, घटाव, गुणा और भाग के नियम बीजगणित के भिन्न में भी लागू होते हैं। अंकगणित में भाग के चिन्ह को × के चिन्ह में बदल कर दाईं ओर की राशि को उलट देते हैं। उदाहरण ों। जैसे—

(i) $\frac{3}{2}+\frac{5}{7}=\frac{3\times7+5\times2}{14}=\frac{21+10}{14}=\frac{31}{14}$

(ii) $\frac{3}{2}-\frac{5}{7}=\frac{3\times7-5\times2}{14}=\frac{21-10}{14}=\frac{11}{14}$

(iii) $\frac{3}{2}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times5}{2\times7}=\frac{15}{14}$

(iv) $\frac{3}{2}\div\frac{5}{7}=\frac{3}{2}\times\frac{7}{5}=\frac{3\times7}{2\times5}=\frac{21}{10}$

(v) बराबर का चिन्ह **(Sign of Equality)**— '=' इस चिन्ह को समानता का चिन्ह कहते हैं। $x=y$ का अर्थ यह है कि x से सूचित संख्या और y से सूचित संख्या दोनों समान हैं।

दूसरे प्रकार के चिन्ह (Some other Signs)—बीजगणित में हमलोग कुछ दूसरे प्रकार के भी चिन्हों का व्यवहार करते हैं। वे निम्नलिखित हैं—

(i) द्वि-अर्थक चिन्ह (*Ambiguous Sign*)

(ii) भेद चिन्ह (*Sign of Difference*)

(iii) चूँकि का चिन्ह

(iv) इसलिए का चिन्ह

(i) द्वि-अर्थक चिन्ह (Ambiguous Sign)— '$\pm$' इस चिन्ह को द्वि-अर्थक अथवा दुमानी चिन्ह कहते हैं, और यह चिन्ह किसी संख्या के पहले रखा जाये तो उससे यह सूचित होता है, कि यह संख्या उसकी पूर्व संख्या के साथ या, तो जोड़ी जायेगी या उसमें से घटायी जायेगी। जैसे यदि $x=5$ और $y=3$ हो, तो $x \pm y$ से या तो 8 या 2 सूचित होगा।

(ii) भेद चिन्ह (Sign of Difference)— '$\sim$' इस चिन्ह को भेद चिन्ह कहते हैं, और यदि यह दो संख्याओं के बीच रखा जाय तो इससे यह सूचित होता है कि इन दो संख्याओं में से जो संख्या बड़ी है, उसमें से दूसरी संख्या को जो छोटी है घटना होगा। इसलिए यदि $x=5$ और $y=8$ हो, तो $x \sim y$ का मान 3 होगा।

(iii) 'चूँकि' का चिन्ह—'$\because$' यह 'चूँकि' या 'क्योंकि' का चिन्ह है।

(iv) 'इसलिए' का चिन्ह—'$\therefore$' यह 'इसलिए' का चिन्ह है।

3. परिभाषाएँ (Definitions)—

व्यंजक अथवा राशिमाला (Expression)—गणित के अक्षरों, अङ्कों तथा क्रिया चिन्हों के किसी सार्थक समूह को बीजगणितीय व्यंजक (*Algebraical Expression*) कहते हैं। कभी-कभी इसे केवल राशि भी कहते हैं।

पद (Term) किसी भी व्यंजक अथवा राशिमाला के जो-जो अङ्क धन (+) अथवा ऋण (−) चिन्ह द्वारा एक दूसरे से जुड़े हों उनमें से प्रत्येक अंश

को पद कहते हैं। जैसे '$4x + xy \div z \times l - 8x \times m + n$' व्यंजक में तीन पद, $4x$, $xy \div z \times l$ और $8x \times m + n$ हैं।

व्यंजक दो प्रकार के होते हैं, सरल *(Simple)* व्यंजक और मिश्र *(Compound)* व्यंजक। जिस व्यंजक में केवल एक ही पद हो (अर्थात् जिसमें कोई अंश '+' या '−' चिह्न द्वारा जुड़ा न हो) उसको सरल व्यंजक या एक पदी कहते हैं, जैसे $2xy$, $4xy \times z$. जिस व्यंजक में एक से अधिक पद हों उसको मिश्र व्यंजक कहते हैं। जिस व्यंजक में दो पद हों उसको द्विपदी *(Binomial)*, जैसे $x + 2y$; जिसमें तीन पद हों उसे त्रिपदी *(Trinomial)*, जैसे $2x + 3y + z$. और जिसमें तीन से भी अधिक पद हों, उसे बहुपदी *(Polynomial or Multinomial)* व्यंजक कहते हैं।

नोट 1.—'$x \div y \times z$' और '$x \div yz$' इन दोनों राशियों का फर्क जानना चाहिए। पहली राशि यह सूचित करती है कि x द्वारा सूचित संख्या को y द्वारा सूचित संख्या से भाग देकर भजनफल को z द्वारा सूचित संख्या से गुणा करना होगा। दूसरी राशि द्वारा यह सूचित होता है कि y और z द्वारा सूचित संख्याओं को गुणा करके गुणनफल से x द्वारा सूचित संख्या में भाग देना होगा।

नोट 2.—अगर एक ही व्यंजक में चारों चिह्न '+', '−', '×', '÷' और 'का' का चिह्न (·) एक साथ अथवा इन सभी चिन्हों में कुछ ही एक साथ आवें तो निम्नलिखित सूत्र से व्यंजक का मूल्य निकालना चाहिए।

सूत्र — 'का' को पहले कीजिए ता पीछे दो भाग,
गुणा करो धन जोड़ दो अन्त में लो घटाय।

गुणनफल (Product), गुणनखंड (Factor)—दो अथवा दो से अधिक संख्याओं को एक के बाद एक गुणा करने से जो संख्या निकलती है उसको उन संख्याओं का गुणनफल कहते हैं, और उन संख्याओं में से प्रत्येक को उस गुणनफल का गुणनखंड कहते हैं। जैसे $2 \times 5 \times 8 = 80$ है; इसलिए

80, 2, 5 और 8 का गुणनफल है, और 2, 5 और 8 में से प्रत्येक अङ्क 80 का गुणनखंड है। उसी प्रकार 5, x, y z में से प्रत्येक $5xyz$ का गुणनखंड है, क्योंकि $5xyz = 5 \times x \times y \times z$.

गुणक (Co-efficient)—किसी बीजगणितीय सरल राशि के पहले जो गुणा करने वाला अङ्क या अक्षर या अङ्क और अक्षर दोनों रखे जायें, वे उस सरल राशि के गुणक कहलाते हैं। जैसे $8xyz$ सरल राशि में 8, xyz का गुणक, '$8x$' yz का गुणक; और $8xy$', z का गुणक है।

कोई गुणक यदि केवल अङ्क हो, उसे अङ्क गुणक (*Numerical Co-efficient*) कहते हैं, जैसे $8xyz$ में 8 इस सरल राशि का अङ्कगुणक है।

नोट—यदि किसी सरल राशि के पहले कोई अङ्क गुणक रूप में नहीं हो, तो '1' ही उस सरल राशि का अङ्कगुणक समझना चाहिए।

घात (Power), घातांक (Index or exponent)—किसी संख्या को उसी संख्या द्वारा बार-बार गुणा करने से जो गुणनफल मिलता है, उसको उस संख्या का घात कहते हैं। जैसे $x \times x$, $x \times x \times x$, $x \times x \times x \times x$, आदि '$x$' के भिन्न-भिन्न घात हैं। '$x \times x$' को x का द्वितीय घात या वर्ग कहते हैं और उसे x^2 लिखते हैं; '$x \times x \times x$' को x का तृतीय घात या घन कहते हैं और उसे x^3 लिखते हैं, '$x \times x \times x \times x$' को x का चतुर्थ घात कहते हैं; और उसे x^4 लिखते हैं; आदि। इसी प्रकार '$x \times x \times x \times \cdots\cdots n$ बार' को x का n घात कहते हैं और उसे x^n लिखते हैं। संख्याओं का घात लिखने के इस नियम से यह जाना जाता है कि घात उस संख्या को कितनी बार गुणा करने से मिला है। यह प्रकट करने वाला अङ्क संख्या की दाहिनी ओर छोटे अङ्क में थोड़ा सा ऊपर को लिखते हैं। संख्या का घात बतलाने वाले इस छोटे अङ्क या अक्षर को घात का घातांक कहते हैं। जैसे x^2, x^3, x^4, x^n घातों के ^{2}, ^{3}, ^{4}; ^{n} घातांक हैं।

नोट—किसी राशि के ऊपर घातांक न रहने से घात का घातांक '1' समझना चाहिए।

मूल (Root)—वह राशि जिसका वर्ग किसी दी हुई राशि x के बराबर होता है तो x का वर्गमूल (*Square root*) कहलाती है और इसे $\sqrt[2]{x}$ या सिर्फ $\sqrt{x}$ द्वारा सूचित करते हैं। इस तरह 16 का वर्गमूल 4 है, क्योंकि 4 को वर्ग करने पर 16 मिलता है, अर्थात् $\sqrt{16}=4$. वह राशि जिसका तृतीय घात या घन किसी दी हुई राशि y के बराबर होता है, y का घनमूल (*Cube root*) कहलाती है और उसे $\sqrt[3]{y}$ द्वारा सूचित करते हैं। जैसे 27 का घनमूल 3 है, क्योंकि 3 को घन करने पर 27 मिलता है।

इसी प्रकार किसी संख्या का n घात (*nth Power*) यदि किसी दूसरी निश्चित संख्या z के समान हो, तो पहली संख्या को z का n घात मूल (*nth root*) कहते हैं और उसको $\sqrt[n]{z}$ इस प्रकार लिखते हैं। जैसे, $2=\sqrt[5]{32}$, क्योंकि $2^5=32$, $3=\sqrt[4]{81}$, क्योंकि $3^4=81$; इत्यादि।

'$\sqrt{}$' इस चिह्न को करणी चिह्न (*Radical sign*) कहते हैं।

कोष्ठक (*Brackets*)—अङ्कगणित की तरह बीजगणित में भी कोष्ठक व्यवहार में आते हैं। ये इस प्रकार हैं—

( ), लघु कोष्ठक या छोटा कोष्ठक (*Parentheses*)
{ }, घनु कोष्ठक या मँझोली कोष्ठक (*Braces*)
[ ], गुरु कोष्ठक या बड़ा कोष्ठक (*Crotchets*)

जब कोई व्यंजक किसी कोष्ठक के भीतर रखा जाता है तब उस व्यंजक को एक ही राशि के बराबर माना जाता है, जैसे—

$5\times(8+7)$ में कोष्ठक के अन्दर 8 और 7 दो संख्याएँ है जो '+' चिन्ह से जुटी हुई हैं। इसलिए $8+7$ को एक पद मानना होगा। अतः $5\times(8+7)$ $=5\times15=75$

यदि कोष्ठक नहीं रहता तो ऊपर के व्यंजक का मान निम्नलिखित हो जाता है।

$$=5\times8+7=40+7=47.$$

रेखा कोष्ठक— कभी-कभी किसी व्यंजक के ऊपर एक क्षैतिज रेखा खींच दी जाती है। इस रेखा के नीचे के व्यंजक को एक ही राशि माना जाता है। इस रेखा को रेखा कोष्ठक कहते हैं। जैसे—

$$4x \times \overline{3y + 5z}$$
$$= 4x(3y + 5z)$$
$$= 12xy + 20zx.$$

अगर रेखा कोष्ठक नहीं रहता तो ऊपर के व्यंजक, का मान निम्नलिखित हो जाता है।

$$= 4x \times 3y + 5z$$
$$= 12xy + 5z$$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $a = 8$, $b = 2$, $c = 4$, तो

$5a + 8b + 7c$ का मान बताओ।

दिये हुए शर्त के अनुसार,

$$5a = 5 \times 8 = 40$$
$$8b = 8 \times 2 = 16$$
$$7c = 7 \times 4 = 28$$

$\therefore \quad 5a + 8b + 7c = 40 + 16 + 28 = 84.$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $a = 6$, $b = 4$, $c = 7$, हो, तो

$9a - 7b + 6c$ का मान बताओ।

दिये हुए शर्त के अनुसार,

$$9a = 9 \times 6 = 54$$
$$7b = 7 \times 4 = 28$$
$$6c = 6 \times 7 = 42$$

$\therefore \quad 9a - 7b + 6c = 54 - 28 + 42$

$= 96 - 28$

$= 68.$ उत्तर

उदाहरण 3. यदि $a=8$, $b=2$, $c=4$, तो

$\mathbf{a-c\div b+a\div c}$ का मान बताओ।

दिये हुए शर्त्त के अनुसार;

व्यंजक $a-c\div b+a\div c=8-4\div 2+8\div 4$

$$=8-\frac{4}{2}+\frac{8}{4}$$

$$=8-2+2$$

$$=10-2=8.$$ उत्तर

उदाहरण 4. यदि $a=5$, तो

$\mathbf{9a^5+4a^3+8a+6}$ का मान बताओ।

दिये हुए शर्त्त के अनुसार,

$$9a^5=9\cdot 5^5$$

$$=9\times 3125=28125$$

$$4a^3=4\times 5^3$$

$$=4\times 125=500$$

$$8a=8\times 5=40$$

$$\therefore\ 9a^5+4a^3+8a+6=28125+500+40+6$$

$$=28671.$$ उत्तर

उदाहरण 5. यदि $a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=6$, तो

$$\frac{\mathbf{a^3+b^3+c^3+d^3-3abcd}}{\mathbf{a^2+b^2+c^2+d^2-bc-bd-cd-ab-ad-ca}}$$ का मान बताओ।

दिये हुए शर्त्त के अनुसार,

$a^3=2^3=8$; $b^3=3^3=27$; $c^3=4^3=64$; $d^3=6^3=216$,

$3abcd=3\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6=432$

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3+d^3-3abcd$$

$$=8+27+64+216-432$$

$$=315-432=-117$$ उत्तर

फिर $a^2 = 2^2 = 4$, $b^2 = 3^2 = 9$; $c^2 = 4^2 = 16$; $d^2 = 6^2 = 36$;
$bc = 3 \cdot 4 = 12$; $cd = 4 \cdot 6 = 24$; $bd = 3 \cdot 6 = 18$; $ab = 2 \cdot 3 = 6$,
$ad = 2 \cdot 6 = 12$; $ca = 4 \cdot 2 = 8$.

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - ca - ad - bd - cd$
$= 4 + 9 + 16 + 36 - 6 - 12 - 8 - 12 - 18 - 24$
$= 65 - 80 = -15$

$$\therefore \frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3abcd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - ad - ca - bd}$$

$$= \frac{-117}{-15} = \frac{117}{15} = 7\frac{12}{15} = 7\frac{4}{5}$$ उत्तर

उदाहरण 6. अगर $a = 7$, $b = 4$, $c = 2$, तो

$3a - 2 - \overline{4b - 2c}$ का मान बताओ।

दिये हुए शर्त्त के अनुसार,

$3a = 3 \cdot 7 = 21$

$4b = 4 \cdot 4 = 16$

$2c = 2 \cdot 2 = 4$

$\therefore\ 3a - 2 - \overline{4b - 2c} = 21 - 2 - \overline{16 - 4}$

$= 19 - 12 = 7$ उत्तर

उदाहरण 7. अगर $a = 7$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 3$ हो, तो

$(3a + 5b - 3c) \sim (4a - 6b - c)$ का मान बताओ।

दिये हुए शर्त्त के अनुसार,

$3a = 3 \times 7 = 21$

$5b = 5 \times 4 = 20$

$3c = 3 \times 2 = 6$

$$4a = 4 \times 7 = 28$$
$$6b = 6 \times 4 = 24$$
$$c = 2 = 2$$

$\therefore \quad 3a + 5b - 3c = 21 + 20 - 6 = 41 - 6 = 35$

और $\quad 4a - 6b - c = 28 - 24 - 2 = 28 - 26 = 2$

$\therefore \quad (3a + 5b - 3c) \sim (4a - 6b - c) = 35 \sim 2 = 33$ उत्तर

उदाहरण 8. यदि $c = 8$, $e = 4$, $n = 2$ हो, तो $\sqrt[3]{cen}$ का मान बताओ।

दिये हुए शर्त के अनुसार, $\sqrt[3]{8 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt[3]{64}$

$$= \sqrt[3]{4^3} = 4^{\frac{3}{3}} = 4$$ उत्तर

उदाहरण 9. यदि $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$ हो, तो निम्नलिखित का मान निकालो।

(i) $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{b}{d} \times \dfrac{ab + c}{d + a}$

(ii) $\dfrac{a + b + c + d}{a + b + c - d} \times \dfrac{a + b - c + d}{c + d - a - b}$

(i) दिये हुए शर्त के अनुसार,

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}; \ \frac{b}{d} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$ab + c = 1 \cdot 2 + 3 = 5$$
$$d + a = 4 + 1 = 5$$

अतः दी हुई राशि $= \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \times \frac{5}{5}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} \times \frac{5}{5} = 1,$$ उत्तर

(ii) दिये हुए शर्त्त के अनुसार,

$$a+b+c+d=1+2+3+4=10$$

$$a+b+c-d=1+2+3-4=2$$

$$a+b-c+d=1+2-3+4=4$$

$$c+d-a-b=3+4-1-2=4$$

अतः दी हुई राशि $=\frac{10}{2}\times\frac{4}{4}=5$, उत्तर

उदाहरण 10. यदि $b=3$, $c=8$, $e=4$; $p=1$ हो, तो

$\sqrt[3]{c}+\overline{3p+4e}\,(p+b)^3$ का मान निकालो।

दिये हुए शर्त्त के अनुसार,

$$\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2\times2\times2}=2$$

$$\overline{3p+4e}=3\times1+4\times4=19$$

$$(p+b)^3=(1+3)^3=4^3=64$$

अतः दी हुई राशि $=2+19(64)$

$=2+1216=1218$, उत्तर

EXAMPLE 1

अगर $a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=6$, $x=8$ हो, तो इनके मान बताओ—

1. ab^3
2. $7b+9c^3$
3. $12a^2+15b^2$
4. $15c^2-6a^2$
5. $c^3d^3\div a^2d^3$
6. $3a^2\times6c^4\div2b^2$
7. $a^3x^3+b^2d^2+a^3b^2+d^2x^3$
8. $15a^5+10b^4-7c^3\times5d^2\div4x^2$
9. $\dfrac{a^8+b^3-d^2}{a^2+x}\div\dfrac{b^4+d^3}{c^3+x^2+a^6}$
10. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a+b}+\dfrac{b^2+2bc+c^3}{b+c}+\dfrac{x^3+d^3}{x-d}$

यदि $m=2,\ n=3,\ p=4,\ q=0,\ r=7,\ s=10$ हो, तो इनके मान बताओ—

11. $8m-3p \div mn+2 \times 3r \div 5s \div 2 \times p$

12. $3 \times r \div 5 \times s \div 7 \times p-8rs \div m \div 3 \times n \div 7p+5m \div 2r+7$

13. $\dfrac{3m+2n}{q+p}-\dfrac{4p-3n}{q+r}+\dfrac{2p+3m}{q+m}$

14. यदि $a=2,\ b=3,\ c=1,\ d=4$, तो इनके मान बताओ—

(i) $\sqrt{a^3+b^3+c^3+d^3}$, (ii) $\sqrt{20a^3-5d^2+5b+5}$

यदि $a=2,\ b=3,\ c=4;\ x=\frac{1}{2},\ y=-1,\ z=2$, तो इनके मान बताओ—

15. $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}$ 16. $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}$

17. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}\right)$

18. $\dfrac{a^x+b^y+c^z-\frac{2}{3}x+2y-7z}{x^a+y^b+z^c-a+b-4c}$

19. यदि $a=3,\ b=4,\ c=5,\ d=0$, तो

$\dfrac{\sqrt{(3a^2-bc)+9}}{ac+bd}+\sqrt[3]{(c-a)(b-d)}$ का मान बताओ।

20. यदि $a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{5}$, तो इनके मान बताओ—

$$\sqrt{\left(\frac{a-b^3}{a-b}\right)}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \div \frac{5a+4b}{a+b}}$$

21. यदि $m=2$, $n=3$, $p=4$, $q=0$, $r^2=7$, $s=10$ हो, तो निम्नलिखित का मान निकालो—

(i) $s\times 6\div 5m+8p\div 16n$

(ii) $4\times\dfrac{n-m}{p}-3\times\dfrac{p-m}{n}+2\times\dfrac{p-n}{m}$

(iii) $\dfrac{11r+n}{p+q}\times 2pm+\dfrac{14s+4n+2p}{5n+2}$

$a^3+b^3+c^3-3abc$ का मूल्य निकालो,

22. जब $a=29$, $b=24$, $c=27$

23. जब $a=5{\cdot}625$, $b=3{\cdot}625$, $c=4{\cdot}625$

24. जब $a=44\frac{3}{7}$, $b=51\frac{3}{7}$, $c=58\frac{3}{7}$

25. जब $a=1667$, $b=1674$, $c=1659$

26. जब $a=3$, $b=4$, $c=5$, तो निम्नलिखित का मान बताओ —

(i) $\dfrac{2a+3b+4c}{a+c}+\dfrac{3a+2b}{ab+c}+\dfrac{ca+b}{bc-1}$

(ii) $\dfrac{3a+5c}{b+4c}\times\dfrac{bc+2a-2}{3ab-2}\div\dfrac{abc}{ab+ac}$

(iii) $\dfrac{a+b+c}{a+b-c}+\dfrac{b-c+a}{b+c-a}+\dfrac{c-a+b}{c+a-b}$

27. यदि $a=5$, $b=2$, $c=3$, तो निम्नलिखित का मान बताओ—

(i) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$ (ii) $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c}$

(iii) $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}$

दो

धनात्मक और ऋणात्मक राशियाँ

(Positive and Negative Quantities)

4. अध्याय 1 से यह पूर्णतः स्पष्ट है कि चिन्ह (+) धन और चिन्ह (−) ऋण को प्रकट करता है। अतः जिस राशि के पहले (+) चिन्ह हो उसे धनात्मक समझना चाहिए और जिस राशि के पहले (−) चिन्ह हो उसे ऋणात्मक समझना चाहिए। जैसे, +9 या $+x$ धनात्मक राशि को प्रकट करता है। उसी प्रकार −9 या $-x$ ऋणात्मक राशि को प्रकट करता है।

नोट—जब किसी राशि के पहले कोई चिन्ह नहीं लगा हो, तो उस जगह पर (+) चिन्ह समझा जाता है और इस प्रकार राशि धनात्मक समझी जाती है। जैसे 7 राशि को सोचें। इसके आगे कोई चिन्ह नहीं है, अतः इसे + 7 समझना चाहिए।

अगर किसी बड़ी राशि में से कोई छोटी राशि घटायी जाय, तो शेष धनात्मक होता है। जैसे, $9-5=4$ या $9a-5a=4a$.

अगर किसी राशि में उसी राशि को घटाया जाय, तो शेष शून्य बचता है। जैसें, $9-9=0$ या $9a-9a=0$.

अगर किसी छोटी राशि में से किसी बड़ी राशि घटायी जाय, तो शेष ऋणात्मक होता है। जैसे

$$8-10=-2;\text{ या, } 8a-10a=-2a.$$

चूँकि किसी धन राशि में दूसरी धन राशि के जोड़ने से पहली धन राशि बढ़ जाती है। जैसे $7+8=15$, या, $7a+8a=15a$. इसलिए किसी धनराशि में दूसरी धन राशि को घटाने से वह धन राशि जरूर घट जायेगी। जैसे, $(+5)-(+3)=+2$, या, $(+5a)-(3a)=+2a$.

चूँकि किसी धन राशि में कोई ऋणराशि जोड़ने से वह धन राशि घट जा है, इसलिए उस धन राशि में से कोई ऋण राशि घटाने से वह धन राशि ज बढ़ जायेगी। जैसे $(+3)-(-4)=3+4=7$

किसी ऋण राशि में कोई दूसरी ऋण राशि जोड़ने से ऋण राशि बढ़ जात है, यानि उसका असली मान घट जाता है। जैसे, $(-3)+(-4)=-7$.

इसलिए किसी ऋण राशि में से कोई ऋण राशि घटाने से वह ऋण रा घट जायेगी, यानि उसका असली मान बढ़ जायेगा। जैसे,

$$(-5)-(-2)=-5+2=-3.$$

किसी ऋण राशि में कोई धन राशि जोड़ने से ऋण राशि का असली मा बढ़ जाता है। जैसे,

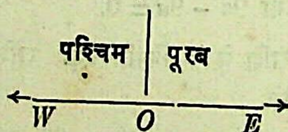
$$(-7)+(+4)=-7+4=-3.$$

इसलिए किसी ऋणराशि में से कोई धन राशि घटाने से ऋणराशि असली कीमत घट जाती है। जैसे—

$$(-6-(+3)=-6-3=-9.$$

अगर किसी व्यापारी को -10 रुपये का नफा हुआ है तो यह समझना चाहिए कि उस व्यापारी को असलीयत में 10 रु० का घाटा हुआ है। उसी प्रकार किसी दूसरे व्यापारी को $+10$ रु० का घाटा हुआ है तो यह समझना चाहिए कि उस व्यापारी को -10 रु० का नफा हुआ है।

5. रेखा चित्र द्वारा उदाहरण—



माना जाय कि WE एक सड़क है जो पश्चिम से पूरब को तरफ गयी है। O सड़क का मध्य विन्दु है जहाँ पर एक आदमी खड़ा है। जगह W उससे पश्चिम है और जगह E उससे पूरब है। अगर O से E की दूरी $+100$ मीटर है तो O से W की दूरी को -100 मीटर लिखा जायेगा। अगर कहा जाय कि वह आदमी उस सड़क पर O से $+50$ मीटर पूरब गया तो इसका मतलब यही होगा

कि वह आदमी O से -50 मीटर पश्चिम गया। उसी प्रकार उसे अगर O से -20 मीटर पूरब जाना है, इसका मतलब होगा कि उसे O से $+20$ मीटर पश्चिम जाना है।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. 60 पौं० की आमदनी यदि 15 द्वारा सूचित हो, तो 100 पौं० के कर्ज को कैसे प्रकट करोगे?

∵ 60 पौं० की आमदनी 15 द्वारा सूचित होता है,

∴ 100 पौं० की आमदनी $= \frac{100 \times 15}{60} = 25$ द्वारा सूचित होगा।

∴ 100 पौं० के कर्ज को -25 द्वारा सूचित करेंगे।

उदाहरण 2. किसी आदमी को रोजगार में 100 रु० का लाभ हुआ और 164 रु० का घाटा हुआ तो उसे कुल कितने रु० का लाभ या घाटा हुआ।

∵ उस आदमी को 164 रु० का घाटा हुआ।

∴ उस आदमी को -164 रु० का लाभ हुआ।

अतः उस आदमी को 100 रु० -164 रु० का लाभ हुआ।

यानि उस आदमी को -64 रु० का लाभ हुआ।

यानि उस आदमी को 64 रु० का घाटा हुआ।

उदाहरण 3. एक आदमी 12 मील पूरब चलकर फिर 16 मील वापस लौट गया, तो वह कितनी दूर पूरब पहुंचा?

∵ वह आदमी 16 मील पूरब से लौट आया।

∴ वह आदमी -16 मील पूरब गया।

अतः वह आदमी 12 मील $+ (-16$ मील) पूरब पहुंचा।

यानि वह आदमी -4 मील पूरब पहुंचा।

यानि वह आदमी 4 मील पश्चिम पहुंचा।

EXAMPLE 3

1. निम्नलिखित के अर्थ बताओ—

   (i)—20 पौं० लाभ, (ii) −8 मीटर की ऊँचाई,

   (iii) −40 रु० का घाटा, (iv) −160 फी० की गहराई,

   (v) भारत की जनसंख्या (−6) प्रतिशत घट गयी ।

2. किसी सौदागर का 30 पौं० का घाटा यदि 30 द्वारा सूचित हो, तो 70 पौं० का लाभ किस संख्या द्वारा सूचित होगा ?

3. 100 पौं० कर्ज यदि 25 द्वारा सूचित हो, तो 400 पौं० की आमदनी को किस संख्या से सूचित करेंगे ?

4. राम मोहन से −6 साल बड़ा है । अगर मोहन की उम्र 13 साल है, तो बतलाओ राम की उम्र क्या है ?

5. वह 7 बजकर 12 मिनट पर स्टेशन पहुँचा । गाड़ी जब आयी, तब 8 बजने में −12 मिनट की देरी थी । बताओ, उसके पहुँचने के कितनी देर बाद गाड़ी आयी ?

6. एक आदमी 20 मील पूरब चलकर फिर 28 मील वापस चला गया तो वह कितनी दूर पूरब चला ?

7. किसी नदी का जल पहले दिन 12 *cm* बढ़ा, दूसरे दिन 9 *cm* घटा, तीसरे दिन फिर 15*cm* बढ़ा । यदि 3*cm* की लम्बाई को इकाई मानें, तो भिन्न-भिन्न दिनों के जल के बढ़ाव को संख्या द्वारा प्रकट करो ।

8. (i) (−20) में कितना घटाने से (−10) होगा ?

   (ii) (+12) में कितना जोड़ने से (+8) होगा ?

   (iii) (−9) में कितना जोड़ने से (−5) होगा ?

   (iv) (+5) कितना घटाने से (−8) होगा ?

———

तीन

जोड़

(Addition)

6. परिभाषा—

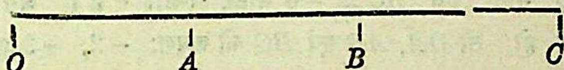
दो या दो से अधिक राशियों या पदों को इकट्ठा करने की क्रिया को जोड़ कहते हैं और उनके जोड़ से जो फल प्राप्त होता है, उसे योगफल कहते हैं। जोड़ का चिन्ह '+' है, जैसे—

$3x$ और $8x$ का जोड़ $= 3x + 8x$

$= 11x$

यहाँ पर $3x$ और $8x$ का योगफल $11x$ है।

7. दो धन राशियों का योगफल—



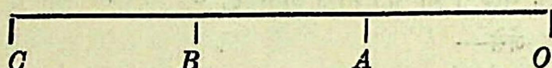
माना कि OC एक सीधी सड़क को सूचित करता है, और उस पर बायीं से दायीं ओर अर्थात् O से C की ओर का रास्ता धन राशि द्वारा सूचित किया जाता है। माना कि इस सीधी सड़क पर A, B और C चित्र में दिखाये गये की भाँति तीन विन्दु हैं। ये ऐसे बिन्दु हैं कि $OA = 2$ मीटर, $AB = 3$ मीटर एवं $BC = 4$ मीटर लम्बाई में हैं। अगर दूरी की इकाई मीटर हो, तो OA, AB एवं BC को क्रमशः $+2$, $+3$ और $+4$ से प्रकट करेंगे। यदि कोई व्यक्ति O से चलकर पहले घंटे में A तक पहुँचे, दूसरे घंटे में A से B तक और तीसरे घंटे में B से C तक पहुँचे तो तीन घंटे के बाद वह व्यक्ति O से C पर पहुंच जायेगा और उस व्यक्ति द्वारा O से C तक तय की हुई दूरी OC होगी और यह दूरी $+9$ द्वारा प्रकट होगी।

अब चूँकि (पहले घंटे की चली दूरी) + (दूसरे घंटे की चली दूरी) + (तीसरे घंटे की चली दूरी) = तीनों घंटे की चली दूरी,

$\therefore$ $(+2)+(+3)+(+4)=+9$; अर्थात् यदि साधारण रीति से बतलाया जाये तो $(+a)+(+b)+(+c)=+(a+b+c)$;

$\therefore$ जब दो या दो से अधिक घनराशियों को जोड़ा जाता है, तो जोड़ या योगफल भी एक धन राशि ही होती है, और योगफल की असल कीमत यौगिक राशियों के विशुद्ध मूल्य के जोड़ के बराबर होती है।

8. दो ऋण राशियों का योगफल—



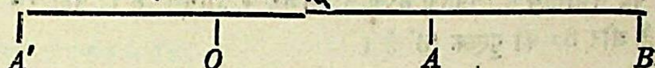
माना कि OC एक सीधी सड़क है और उस पर दाहिने से बायें अर्थात् O से C की ओर रास्ता ऋण राशि द्वारा प्रगट होता है। माना कि इस सीधी सड़क पर A, B एवं C तीन ऐसे विन्दु हैं जिनमें $OA=-2$ मीटर, $AB=-3$ मीटर एवं $BC=-4$ मीटर लम्बाई में हैं। अगर दूरी की इकाई मीटर हो, तो OA, AB एवं BC को क्रमशः -2, -3 एवं -4 से प्रगट करेंगे। यदि कोई व्यक्ति O से चलकर पहले घंटे के अन्त में A पर, दूसरे घंटे में A से B पर एवं तीसरे घंटे में B से C पर पहुँचे, तो तीन घंटे के बाद उस व्यक्ति की O से दूरी OC पर होगी और यह दूरी -9 द्वारा प्रगट होगी।

अब चूँकि (पहले घंटे की चली दूरी) + (दूसरे घंटे की चली दूरी) + (तीसरे घंटे की चली दूरी) = तीन घंटे की चली दूरी

$\therefore$ $(-2)+(-3)+(-4)=-9$

इसलिए दो या तीन ऋण राशियों का योग करने पर योगफल एक ऋण राशि होती है और योगफल की असल कीमत दोनों राशियों के विशुद्ध मूल्य के जोड़ के बराबर होती है।

9. एक ऋण राशि और दूसरी धन राशि का योगफल—



माना कि OB एक सड़क है जो बायीं से दाहिनी ओर अर्थात् O से B की ओर धन राशि है, अतः B से O की ओर ऋण राशि होगी। माना कि दूरी $OB=5$ मीटर एवं दूरी $AB=2$ मीटर है। कोई व्यक्ति 1 घंटे में O से चलकर B पर पहुंचता है एवं फिर दूसरे घंटे में B से चलकर A पर लौट आता है तो पहले और दूसरे घंटे में उसका चला हुआ रास्ता क्रमशः $+5$ और -2 द्वारा प्रकट होगा, और O से उसका दो घंटे में चला हुआ पथ $(+5)+(-2)$ द्वारा प्रगट होगा। किन्तु दो घंटे के बाद O से उसकी दूरी असल में OA है और उसको $+3$ द्वारा सूचित करेंगे।

$$\therefore \quad (+5)+(-2)=+3$$

यदि यह व्यक्ति पहले घंटे में O से B तक जाये और दूसरे घंटे में लौटकर A' पर आ पहुंचे, तो पहले और दूसरे घंटे में पार किये रास्ते को $+5$ एवं -8 द्वारा सूचित करेंगे, इसलिए दो घंटे के बाद उसकी दूरी $(+5)+(-8)=5-8=-3$ द्वारा सूचित होगी।

साधारणतः $(+a)+(-b)=+(a-b)$, यदि

$a > b$ हो $= -(b-a)$, यदि $a < b$ हो

इसलिए जब एक धन राशि और ऋण राशि जोड़ी जाती है और यदि धन राशि की असल कीमत ऋण राशि के विशुद्ध मूल्य से अधिक हो, तो योगफल धन राशि होती है, और यदि कम हो, तो योगफल ऋण राशि होती है, और दोनों परिस्थितियों में योगफल का विशुद्ध मूल्य यौगिक राशियों में से छोटी राशि को बड़ी राशि में से घटाने से निकलती है।

10. जोड़ने के तरीके—

(i) सजातीय पदों (एक ही किस्म के पदों) को जोड़ने के लिए उनके गुणकों (*Co-efficient*) के योगफल के बाद पदवाला अक्षर लिख दिया जाता है। जैसे—

7a और 8a को जोड़ो।

दोनों पद सजातीय हैं क्योंकि हरेक में अक्षर a सामिल है। यहाँ $7a$ का गुणक '7' है और $8a$ का गुणक '8' है।

$\because$ दोनों पदों के गुणकों का जोड़ $= 7 + 8 = 15$

$\therefore$ इष्ट जोड़ $= 7a + 8a$

$= (7 + 8)a = 15a.$

(ii) विजातीय पदों (जिसके पद एक किस्म के नहीं हों) को जोड़ने के लिए राशि में एक के बाद दूसरी लिख दी जाती है और उनके पहले उनके अपने-अपने चिन्ह दे दिये जाते हैं।

जैसे— **3m और 5n को जोड़ो।**

यहाँ एक पद $3m$ और दूसरा पद $5n$ है। इसलिए दोनों पद विजातीय हैं। अर्थात् दोनों में कोई भी अक्षर उभयनिष्ठ नहीं है।

$\therefore$ इनका जोड़ $= 3m + 5n$

(iii) यदि कई तरह के सजातीय तथा विजातीय पद जोड़ने को दिये गये हों तो सजातीय पदों को अलग-अलग समूहों में बाँटकर जोड़ा या सरल किया जाता है।

जैसे— **नीचे लिखे पदों का योगफल ज्ञात करो—**

3a, 2b, 3c, – 3b, – 8c

यहाँ पर तीन प्रकार के पद हैं, एक a वाला पद, दूसरा b वाला पद और तीसरा c वाला पद। लेकिन b वाला पद दो हैं, एक $2b$ और दूसरा $-3b$ और c वाला पद भी दो हैं, एक $3c$ और दूसरा $-8c$ तथा a वाला पद एक ही है।

$\therefore$ इष्ट जोड़ $= 3a + 2b + 3c - 3b - 8c$

$= 3a + b(2 - 3) + c(3 - 8)$

$= 3a - b - 5c.$

EXAMPLE 4

इनका योगफल बताओ—

1. $5x$, $8x$ और $9x$
2. $3xy$, $9xy$ और $10xy$
3. $5x, -8x$ और $3x$
4. $12x, -7x$ और $-3x$
5. $\frac{1}{2}xy, -\frac{3}{2}xy$ और $\frac{5}{2}xy$,
6. $9xy, -\frac{8}{3}xy$ और $\frac{7}{6}xy$
7. $\frac{3}{2}x, -\frac{5}{3}x$ और $10x$
8. $5x^2yz, -10x^2yz$ और $5x^2yz$
9. $5x^2y^2z^2, -3x^2y^2z^2$ और $-10x^3y^2z^2$
10. 1275 और -325;
11. 2178 और -1321
12. -1527 और -832
13. -2735 और -391
14. -3425 और 768
15. -427 और 39735.

मूल्य निकालो—

16. $3x^2y - 4xy^2 + 3xy - x^3y^3$; यदि $x = y = 1$ हो,
17. $5a^3b - 8ab^2 + 7ab^3 - 8ab$; मदि $a = 1$, $b = 2$
18. $9x^3y + 3xy^2 - 8xy$; यदि $x = 1$, $y = 2$

EXAMPLE 5

इनका योगफल निकालो—

1. $3a$, $5b$ और $7c$,
2. $9a, -7b$ और $-8c$
3. $8x$, $3y$ और $5z$,
4. $8a^2b^2$, $7c^2d^2$ और $11m^2n^2$
5. $3a^2b, -3ab^2$, a^3 और $2b^3$
6. a^2bc, ab^2c, abc^2 और abc
7. a^2, n^2, y^2, m^2, x^2y^2 और $3mnp$.
8. b^2c^2, c^2a^2, a^2b^2, a^4, b^4, और c^4
9. $7a^3b, -8ab^2, -11a^2b$ और $2ab^2$
10. $-3x^2y^2z, -3xy^2z^2$, $4x^2y^2z$ और $8xy^2z^2$
11. $3xyz, -\frac{2}{5}xyz$, $7xyz$ और $\frac{1}{5}xyz$
12. $3x^2yz; -6x^2yz; -11x^2yz$ और $17x^2yz$

13. $6abc^2, 5abc^2, -13abc^2, -9abc^2$ और $15abc^2$
14. $2ab^2c, -5ab^2c, -11ab^2c, 18ab^2c$ और $-4ab^2c$
15. $9a^2b^2c^2, -21a^2b^2c^2, 31a^2b^2c^2$ और $-19a^2b^2c^2$.

EXAMPLE 6

जोड़ो—

1. $2x, -3y, 4x$ और $5y$
2. $-5a, 6b, 11a, -9a$ और $5b$
3. $ab-bc, ca-ab$ और $bc-ca$
4. $a+b, b-c$ और $c-a$
5. $a, a+b, b+c$ और $c-a$
6. $4a-3b, -3a+b, 6a-b$ और $-5a+4b$
7. $x+y-z, x-y+z, -x+y+z$ और $x+y+z$

नीचे लिखे व्यंजकों को जोड़ो—

8. $2a+3b+5a+3b$
9. $a-b-2a-3b$
10. $a+b-2a-3b$
11. $10a+4bc-3a+4d+5bc$
12. $abc+mnp+mp^2+4abc-5mnp-6mp^2$

अगर $a=2, b=3, c=4, m=5, n=6, p=7$ हों, तो इनके योगफल का मान निकालो—

13. $a+b+c$ और $m+n+p$
14. $a+b+c$ और $mn+np+pm$
15. $ab+bc+ca$ और $m+n+p$
16. $a^2+b^2+c^2$ और $m^2+n^2+p^2$
17. $a^2mn+b^2np-c^2pm$ और $m^2ab+n^2bc+p^2ca$
18. $am+bn+cp$ और $ap+bm+cn$.

———

चार

घटाव

(Subtraction)

11. परिभाषा—

(i) जोड़ की उल्टी क्रिया का नाम घटाव है। जैसे एक राशि b किसी दूसरी राशि a से घटायी गयी है, इससे यह समझा जाता है कि c एक ऐसी राशि मिली है, जो यदि b के साथ जोड़ दी जाय तो योगफल a के बराबर हो जाता है। अर्थात् c यदि ऐसी राशि हो कि $b+c=a$, तब $c=a-b$· जिस राशिमें से घटाया जाता है उसको वियोज्य (*Minuend*) और जिस राशि को घटाया जाता है। उसको वियोजक (*Subtrahend*) कहते हैं। एक राशि से दूसरी राशि घटाने से जो राशि मिलती है उसको अन्तर या बाकी (*Remainder*) कहते हैं। यहाँ, a को वियोज्य, b को वियोजक एवं c को अन्तर कहते हैं।

(ii) किसी धन राशि से एक धनात्मक राशि घटाना ऐसा ही है, जैसे कि उसके साथ एक ऋणात्मक को जोड़ देना जिसकी असल कीमत (*absolute Value*) उस धनात्मक राशि के विशुद्ध मूल्य के बराबर है; और किसी राशि से एक ऋणात्मक राशि घटाना ऐसा ही है, जैसा कि उसके साथ एक ऐसी धनात्मक राशि जोड़ दी जाय जिसका विशुद्ध मूल्य उस ऋणात्मक राशि के विशुद्ध मूल्य के बराबर हो।

$\because \quad 5+4=9, \qquad \therefore \quad 9-4=5=9+(-4)$

और $\quad 6+(-2)=4, \quad \therefore \quad 4-6=-2=4+(-6)$

इसलिए साधारण रूप से यदि प्रगट किया जाय, तो $a-b=a+(-b)$ अर्थात् किसी राशि में से एक धनात्मक राशि घटाना अथवा उसके साथ एक उसी विशुद्ध मूल्य की ऋणात्मक राशि जोड़ देना दोनों बराबर है।

जैसे— $-8+9=1$

$\therefore\ 1-(-8)=9=1+8$

और उसी प्रकार $(-6)+(-5)=-11$

$\therefore\ (-11)-(-6)=-5=-11+6$

अतः $(-b)+(a+b)=a$

$\therefore\ a-(-b)=a+b$

अर्थात् किसी एक राशि से दूसरी एक ऋणात्मक राशि को घटाना अथवा उसके साथ उसी विशुद्ध मूल्य की धनात्मक राशि को जोड़ देना दोनों एक ही बात है।

EXAMPLE 7

घटाओ—

1. $7a$ को $12a$ में से
2. $-8a$ को $12a$ में से
3. $5a$ को $-12a$ में से
4. $-8a$ को $-13a$ में से
5. $3a$ को 0 में से
6. $a+b$ को 0 में से
7. $10a+15b$ को $5a+15b$ में से
8. $x+y$ को $a+b$ में से
9. $\frac{1}{2}ab$ को $\frac{3}{4}ab$ में से
10. $\frac{3}{4}xy$ को xy में से
11. $\frac{1}{2}a^2-\frac{2}{3}b^2-\frac{1}{8}c^2-\frac{1}{5}d^2$ को $a^2-\frac{1}{3}b^2-\frac{1}{8}c^2$ में से

12. $a^3+b^3+c^3+d^3$ को $a^3+2b^3+3c^3+4d^3$ में से

13. $-7(m+n)$ को $-3(m+n)$ में से

14. $15(a^2+b^2)+5(c^2+d^2)$ को $20(a^2+b^2)+10(c^2+d^2)$ में से

15. $25(a^2+b^2)+10(a^2-b^2)$ को $27(a^2+b^2)+8$ (a^2-b^2) में से

12. मिश्र व्यंजकों के घटाव का नियम यह है कि सजातीय पदों को सजातीय पदों के नीचे लिखते हैं और वियोजक पदों के चिन्हों को बदलकर जोड़ के नियमानुसार विभाज्य पदों में जोड़ देते हैं।

उदाहरण 1. 2a + 3b − 4c को 5a + 7b − 9c से घटाओ।

वियोज्य $= 5a+7b-9c$

वियोजक $= +2a+3b-4c$

$- \quad - \quad +$

$\therefore$ शेषफल $= 3a+4b-5c$

13. यदि किसी कोष्ठक के बाहर '+' चिन्ह हो, तो सरल करने के लिए कोष्ठक के अन्दर जितने पद हैं, सबका चिन्ह वही रह जाता है जो उनके पहले था। लेकिन यदि कोष्ठक के बाहर '−' चिन्ह हो तो कोष्ठक के अन्दर के सभी पदों का चिन्ह बदल जाता है अर्थात् '+' का '−' और '−' का '+' हो जाता है।

उदाहरण 2. $a-b+(5a-7b)$

$=a-b+5a-7b$

$=(a+5a)-(b+7b)$

$=6a-8b$

उदाहरण 3. $a-b-(5a-7b)$

$=a-b-5a+7b$

$=(a-5a)-(b-7b)$

$=(-4a)-(-6b)$

$=-4a+6b.$

EXAMPLE 8

घटाओ—

1. $3a-5b+8c$ को $2a-3b+5c$ में से
2. $-3a^2-b^2+10c^2$ को $a^2+5b^2+7c^2$ में से
3. $2a^2-4b^2+6c^2-7$ को $-a^2+3b^2-4c^2+5$ में से
4. $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ को $x^2+y^2+z^2$ में से
5. $a^2-2b^2-5c^2-4d^2$ को $a^2+2b^2+5c^2+12d^2$ में से

अगर $a=3$, $b=4$, $c=5$, $d=6$, $x=2$, $y=1$, $z=8$ हो, तो इनका मूल्य निकालो—

6. $3a+(5b-2c)\cdot 8d$
7. $4x-(8y-3z)$
8. $\{4+8y(3x-2z)+9x\}$

कितना जोड़ने से—

9. 2735, 735 बन जायगा ?
10. -257, 97 बन जायगा ?
11. 839, -73 बन जायगा ?
12. -735, -29 बन जायगा ?
13. $a+2b+c$, $2b$ बन जायगा ?
14. $-2a+5b-4c$, $a+b+c$ बन जायगा ?
15. $3x^2+5x-6$, x^2 बन जायगा ?
16. $a^4-2a^2b^2+b^4$, a^4+b^4 बन जायगा ?

नीचे लिखे व्यंजकों को सरल करो—

17. $x+3y+4z+7y-2x-3z$
18. $-x+2y+4x-3y$
19. $3x+2y-6x-7y$
20. $8a-7b-13a+19b$

———

पाँच

कोष्ठक रखना एवं कोष्ठक खोलना

(Insertion of brackets & Removal of brackets)

14. कोष्ठक खोलने का नियम—

(i) यदि कोष्ठक के पहले '+' चिन्ह रहे तो उसके भीतर के व्यंजक के पदों के चिन्हों को न बदलकर कोष्ठक खोला जा सकता है, मानो कोष्ठक के अस्तित्व का कोई मूल्य नहीं है।

जैसे—
$$5+(3+7)$$
$$=5+3+7=15$$

(ii) यदि कोष्ठक के पहले '−' चिन्ह रहे तो उसके भीतर के व्यंजक के प्रत्येक पद का चिन्ह वदलकर (अर्थात् '+' को '−' और '−' को '+' बनाकर) कोष्ठक खोला जाता है।

जैसे—
$$15-(3+7)$$
$$=15-3-7$$
$$=15-10=5$$

(iii) अगर किसी एक ही व्यंजक में तीनों कोष्ठक एक ही साथ अथवा उनमें में कोई दो एक साथ आवें, तो व्यंजक के मान के लिए पहले लघु कोष्ठक तब धनु कोष्ठक और अंत में गुरु कोष्ठक को खोला जाता है।

जैसे—
$$5+[3-\{7-2(8+3)\}]$$
$$=5+[3-\{7-2\cdot 11\}]$$
$$=5+[3-7+22]$$
$$=5+[25-7]=5+18=23.$$

(iv) अगर किसी व्यंजक में पाँचों चिन्ह '+', '−', '×', '÷' '.' एवं तोनों कोष्ठक किसी क्रम में आवें तो पहले हम कोष्ठक खोलते हैं; बाद में चिन्हों के नियम को लगाते हैं।

जैसे— $5[4x + \{3y \div 7x \text{ का } 9y(14y - 3z)\}]$

$$= 5[4x + \{3y \div 7x \text{ का } 9y(14y - 3z)\}]$$

$$= 5[4x + \{3y \div 7x \text{ का } (126y^2 - 27yz)\}]$$

$$= 5[4x + 3y \div 882xy^2 - 189xyz]$$

$$= 5\left[4x + \frac{3y}{3y(294xy - 63xz)}\right]$$

$$= 5\left[4x + \frac{1}{294xy - 63xz}\right]$$

$$= 5\left[\frac{4x(294xy - 63xz) + 1}{294xy - 63xz}\right]$$

$$= \frac{20x(294xy - 63xz) + 5}{294xy - 63xz}$$

$$= \frac{5880x^2y - 1260x^2z + 5}{294xy - 63xz}$$

15. कोष्ठक रखने के नियम—

(i) कोष्ठक के सामने '+' चिन्ह देकर अपने-अपने चिन्हों के साथ चाहे जितने पद हों कोष्ठक के अन्दर रखे जा सकते हैं। जैसे

$$a + b + c = a + (b + c)$$

(ii) कोष्ठक के सामने '−' चिन्ह देकर भी, संख्या में चाहे जितने पद हों, कोष्ठक के अन्दर रखे जा सकते हैं, किन्तु इस हालत में पदों के चिन्हों को वदल के रखना पड़ता है।

जैसे $a - b + c - d = a - (b - c + d)$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. हल करो— $a - [b - \{c - (d - e)\} - f]$

दी गयी राशि $a - [b - \{c - (d - e)\} - f]$

$= a - [b - \{c - d + e\} - f]$

$= a - [b - c + d - e - f]$

$= a - b + c - d + e + f$ उत्तर

उदाहरण 2. हल करो—

$a + [b - \{c - (d - \overline{e - f}) - g\} - h]$

$= a + [b - \{c - (d - e + f) - g\} - h]$

$= a + [b - \{c - d + e - f - \quad\} - h]$

$= a + [b - c + d - e + f + g - h]$

$= a + b - c + d - e + f + g - h.$ उत्तर

उदाहरण 3. हल करो—

$-3x - [-5y - \{7z - (-9x - \overline{11y - 13z})\}]$

दी गयी राशि $= -3x - [-5y - \{7z - (-9x - 11y + 13z)\}]$

$= -3x - [-5y - \{7z + 9x + 11y - 13z\}]$

$= -3x - [-5y - 7z - 9x - 11y + 13z]$

$= -3x + 5y + 7z + 9x + 11y - 13z$

$-3x + 9x + 5y + 11y + 7z - 13z$

$= 6x + 16y - 6z.$ उत्तर

उदाहरण 4. हल करो—

$-2x - [-4y - \{-6z - (-3x - \quad \overline{-5y - 7z})\}]$

दी गयी राशि $= -2x - [-4y - \{-6z - (-3x + 5y + 7z)\}]$

$= -2x - [-4y - \{-6z + 3x - 5y - 7z\}]$

$= -2x - [-4y + 6z - 3x + 5y + 7z]$

$= -2x + 4y - 6z + 3x - 5y - 7z$

$= x - y - 13z$ उत्तर

उदाहरण 5. $a-[-b-\{c-(d-\overline{e-f})\}]$ के कोष्ठों में से पहले [ ] को, फिर { } को तब ( ) को और अन्त में '——' को खोलो—

राशि $= a+b+\{c-(d-\overline{e-f})\}$

$= a+b+c-(d-\overline{e-f})$

$= a+b+c-d+e-f$

$= a+b+c-d+e-f.$ उत्तर

उदाहरण 6. हल करो—

$[a-\{b-(c-d)\}]-[2a-\{3b+(2c-4d)\}]$

राशि $= [a-\{b-c+d\}]-[2a-\{3b+2c-4d\}]$

$= [a-b+c-d]-[2a-3b-2c+4d]$

$= a-b+c-d-2a+3b+2c-4d$

$= -a+2b+3c-5d,$ उत्तर

EXAMPLE 9

हल करो—

1. $3a-4b-(8a-6b)+(-2a+5b)$
2. $x+(-y+4x)-(-2x+3y)$
3. $3a-\{6a-(2b-a)\}$
4. $2a-\{5b-\overline{7b-2a}\}$
5. $3-\{5-(6-\overline{7-9})\}$
6. $-2-[-3-\{-4-(-5-6)\}]$
7. $3x-[5y-\{10z-(5x-\overline{10-3z})\}]$
8. $-a-[-b-\{-c-(\overline{-a-b-c})\}]$
9. $\{2a-(3b-5c)\}-[a-\{2b-(c-4a)\}-7c]$
10. $[x-\{y-(z-x)\}-(y-z)]-[z-\{x-(y-z)\}]$

11. $2a - 3b - (4a - 6b) + (-2a + 5b)$

12. $-(5x - y) + (-3x + y) - (2y - 6x)$

13. $-a - \{2b - (6a + 4b)\}$

14. $-2 - [-3 - \{-4 - (-5 - 6)\}]$

15. $-a - [-3b - \{-2a - (-a - 4b)\}]$

16. $2x - [5y - \{9x - (10y - 4x)\}]$

17. $-5a - [3b - \{6a - (5b - 7a)\}]$

18. $-2x - [-4y - \{-6z - (-8x - \overline{-10y - 12z})\}]$

19. $-2x - [-4y - \{-6z - (-3x - \overline{-5y - 7z})\}]$

20. $-2x + [-5y - \{-8z + (-3x - \overline{-6y + 9z})\}]$

———

छः

गुणा

(Multiplication)

16. परिभाषा—

हमलोगों ने पहले अध्याय में बीजगणित और अङ्कगणित के सम्बन्धों को देखा है। वास्तव में बीजगणित एक व्यापक अङ्कगणित है। अतएव अङ्कगणित की तरह बीजगणित में भी गुणा का मतलब किसी अक्षर या अङ्क युक्त अक्षर को कई बार लिखकर जोड़ना है। जैसे—$x \times y = x + x + x + \ldots\ldots y$ बार; अर्थात् x को x में y बार लिखकर जोड़ने से $x \times y$ मिलेगा। उसी तरह $-x \times y = (-x) + (-x) + (-x) \ldots\ldots y$ बार, अर्थात् $(-x)$ को $(-x)$ में y बार लिखकर जोड़ने से $-x \times y$ मिलेगा। जिस राशि को गुणा किया जाता है, उसे गुण्य (*Multiplicand*) एवं जिससे गुणा किया जाता है, उसे गुणक (*Multiplier*) कहते हैं। गुणा करने पर जो राशि आती है, उसे गुणनफल (*Product*) कहते हैं।

17. साबित करना है कि x × y = y × x.

साबित करने के लिए पहले हम x और y को संख्यात्मक मान देते हैं। अतः माना कि $x = 3$ और $y = 5$.

$$\therefore \quad x \times y = 3 \times 5$$
$$= 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \text{ (नियम 17 से)}$$
$$= (1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1)$$
$$+ (1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1)$$

$$=(1+1+1+1+1)+(1+1+1+1+1)$$
$$+(1+1+1+1+1)$$

(हरेक कोष्ठक के प्रथम पदों को एक साथ, दूसरे पदों को एक साथ, तीसरे पदों को एक साथ और चौथे पदों को एक साथ एवं पाचवें पदों को एक साथ जोड़ने पर)

$$=5+5+5$$
$$=5\times3$$

उसी प्रकार, $x\times y=x+x+x....y$ बार$=(1+1+1+....x$ बार)
$+(1+1+1+....x$ बार)
$+(1+1+1+....x$ बार$)+....y$ बार)

पहले की तरह, अब हरेक कोष्ठक के प्रथम पदों को एक साथ, दूसरे पदों को एक साथ........आदि रखने पर

$x\times y=(1+1+1+........y$ बार$)+(1+1+1+....y$ बार)
$+....x$ बार
$=y+y+y+....x$ बार
$=y\times x.$

नोट—इसी तरह यह भी साबित हो जाता है कि किन्हीं दो संख्याओं में पहली और दूसरी संख्या का गुणनफल दूसरी और पहली संख्या के गुणनफल के बराबर होता है। इस नियम को गुणा का *Commutative law* कहते हैं।

18. चिन्हों के नियम—

अगर गुण्य और गुणक दोनों समान चिन्ह के हों, तो गुणनफल धन राशि होगी और अगर असमान चिन्ह के हों, तो गुणनफल ऋण राशि होगी।

(i) $(+1)\times(+1)=+1$

(ii) $(-1)\times(-1)=+1$

(iii) $(+1)\times(-1)=-1$

(iv) $(-1)\times(+1)=-1$

19. घातांकों (Indices) के नियम—

चूंकि $a^7=a\times a\times a\times a\times a\times a\times a$

और $a^5=a\times a\times a\times a\times a$

$\therefore \quad a^7\times a^5=a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a$

$=a^{12}=a^{7+5}$

इसी प्रकार यदि m और n दो धनात्मक संख्या हो, तो

$a^m\times a^n=(a\times a\times a\times$ ....m बार)

$\times(a\times a\times a\times$ ....n बार)

$=a\times a\times a\times$ ....$(m+n)$ बार

$=a^{m+n}$

अतः अगर किसी राशि के एक घात को उसी राशि के दूसरे घात से गुणा करना होता है तो पहले राशि के घातांक में दूसरी राशि के घातांक जोड़ देते हैं।

20. गुणनफल निकालने का तरीका—

(i) यदि अंक गुणक वाले पदों का गुणनफल निकालना हो, तो पहले संख्याओं का और बाद में अक्षरों का गुणनफल निकाला जाता है और फिर पूरी राशि के पहले उचित चिन्ह नियम (18) के अनुसार दे दिया जाता है।

जैसे—(i) $3xy\times-5xy=-15x^2y^2$

(ii) $(-5a^2)\times(-3a^2b^5)\times(7a^2b^2c^2)$

$=15a^4b^5\times7a^2b^2c^2$

$=105a^6b^7c^2.$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. सिद्ध करो— $(-xy)^3 = -x^3y^3$

दिया गया व्यंजक $= (-xy)^3 = (-xy)(-xy)(-xy)$
$= (xy)^2 \times (-xy)$
$= -(xy)^3 = -x^3y^3.$ उत्तर

उदाहरण 2. गुणा करो— $16x^2y^2z^3$ का $-3xy$ से।

$(16x^2y^2z^3) \times (-3xy)$
$= -\{(16x^2y^2z^3) \times (3xy)\}$
$= -\{16 \times 3 \times x^2 \times x \times y^2 \times y \times z^3\}$
$= -\{48 \times (x^2 \times x) \times (y^2 \times y) \times z^3\}$
$= -\{48 \times x^3 \times y^3 \times z^3\}$
$= -48x^3y^3z^3.$ उत्तर

उदाहरण 3. हल करो— $(3a^6b^4c^2) \times (5a^3b^2c^3) \times (7abc)$

दी गयी राशि $= \{3 \times 5 \times (a^6 \times a^3) \times (b^4 \times b^2) \times (c^2 \times c^3)\} \times (7abc)$
$= \{15 \times a^9 \times b^6 \times c^5\} \times (7abc)$
$= (15 \times 7) \times (a^9 \times a) \times (b^6 \times b) \times (c^5 \times c)$
$= 105 \times a^{10} \times b^7 \times c^6$
$= 105a^{10}b^7c^6.$ उत्तर

उदाहरण 4. हल करो—
$(-3x^2y) \times (4zy^2x) \times (-x^3z^5y^4) \times (2xyz)$

दी गयी राशि $= \{(-3x^2y) \times (4zy^2x)\} \times \{(-x^3z^5y^4) \times (2xyz)\}$
$= \{(3 \times 4) \times (x^2 \times x)(y \times y^2) \times z\} \times -\{(1 \times z) \times (x^3 \times x) \times (z^5 \times z) \times (y^4 \times y)\}$

$=(-12x^3y^3z)\times(-2x^4z^6y^5)$
$=\{(12\times 2)\times(x^3\times x^4)\times(y^3\times y^5)\times(z\times z^6)\}$
$=24\times x^7\times y^8\times z^7$
$=24x^7y^8z^7.$ उत्तर

EXAMPLE 10

गुणा करो—

1. $3a$ को $8b$ से
2. a^2b को c से
3. ab को $2a^2b^2$ से
4. $-5a^2$ को $-3b^2$ से
5. $-12a^2c^2$ को $-5a^3c^3$ से
6. $-5mn^3$ को $-7m^3n$ से

इनको सरल करो—

7. $(3a^2\times 5b^2c^2)\times 8a^2$
8. $(-3a^3b^2)\times(-4c^2a^2)\times(5a^2b^2c^2)$
9. $(2xyz^2)\times(-4xy^2z)\times(-3x^2yz)$
10. $(-x^2y)\times(-xy^2)\times(-x^2y^2z^2)\times(-xyz)$
11. $(-a)^4\times(-2a^2b^3)^2\times(a^3b)^3$
12. $(-2x^2)\times(7x^4y^7)\times(5x^9y^5)$
13. $(-6a^5b^2c)\times(2c^4a^3b^5)\times(-4b^3c^2a^3)$
14. $(-a)^3\times(-2ab^2)^2\times(a^2b)^3$

(ii) कई पदवाले व्यंजक को एक पदवाले व्यंजक से गुणा करने का नियम यह है कि गुण्य व्यंजक (*Multiplicand*) के हर एक पद को एक पद वाले व्यंजक से गुणा कर देते हैं। क्रिया बायीं ओर से शुरू होती है।

नोट—लेकिन अङ्कगणित में गुणा करने की क्रिया दाहिनी ओर से शुरू होती है।

उदाहरण 1. $3a - 2b + 4c$ को $2ab$ से गुणा करो।

इष्ट गुणनफल $= (3a - 2b + 4c) \times 2ab$

$= (3a) \times (2ab) + (-2b) \times (2ab) + (4c) \times (2ab)$

$= 3 \times 2a \times a \times b + (-2 \times 2b \times a \times b)$

$+ (4 \times 2 \times c \times a \times b)$

$= 6a^2b - 4ab^2 + 8abc.$ उत्तर

उदाहरण 2. $245 \times 5 = 1225.$

उदाहरण 3. $3ab + 8a^2$ को $9ab$ से गुणा करो।

इष्ट गुणनफल $= 9ab(2ab - 3b^2)$

$= 9 \times 2a \times a \times b \times b - 9 \times 3a \times b \times b^2$

$= 18a^2 \times b^2 - 27ab^3$

$= 18a^2b^2 - 27ab^3.$ उत्तर

उदाहरण 4. $a^4 - 3a^3 + 5a^2 - 6a + 4$ को $-6a^2$ से गुणा करो।

इष्ट गुणनफल $= (-6a^2)(a^4 - 3a^3 + 5a^2 - 6a + 4)$

$= -6 \times a^2 \times a^4 + 6 \times 3 \times a^2 \times a^3 - 6 \times 5a^2 \times a^2$

$+ 6 \times 6 \times a^2 \times a - 6 \times 4a^2$

$= -6a^6 + 18a^5 - 30a^4 + 36a^3 - 24a^2.$ उत्तर

EXAMPLE 11

गुणा करो—

1. $2a + 3b^2 - 4c^2$ को $5bc$ से
2. $a^2 + 2ab$ को 5 से
3. $x + 2y$ को xy से
4. $ab - ac + bc$ को $-3abc$ से
5. $4a^2 - 3ab + b^2$ को $2ab$ से
6. $3x - 4y + 5x^2y^2$ को $-2xy^2$ से
7. $2x^3 - 3x^2y - 5x$ को $-3x^2y^2$ से
8. $x^2y - 2xy^2 - y^3$ को $-3xy$ से

9. $3a^2b^2 - ab^2 - 5a^3 + a^2b$ को $7b^2$ से
10. $-2x^3 + 3x^2y - 5xy^2$ को $4xy$ से

इनको सरल करो—

11. $3a(a+4) - 2a(a-5)$
12. $3ab(3ab + 4b^2) - 3b^2(4ab - 3b^2)$
13. $5a^3(a-2) - 2a^2(a-3) + 4a(1-3a^2)$
14. $x^2(3a-4b) + x^2(3a+4b) - x^2(6a-5b)$
15. $7x^3(x-2) - 2x^2(x-3) - 8x^2(1-2x)$
16. $2xy(4a^2 - 3b^2) - 2xy(3a^2 - 2b^2) - 2xy(a^2 + 3b^2)$
17. $a^2(b^2 - c^2) + b^2(c^2 - a^2) + c^2(a^2 - b^2)$
18. $9a^3(a^3 - 2b^2) + 5b^2(3a^3 + b^2) + 3b^2(a^3 - 10b^2)$
19. यदि $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$, $z = c^2 - ab$ हो, तो $ax + by + cz$ का मूल्य निकालो।
20. यदि $x = a + b - c$, $y = c + a - b$ और $z = b + c - a$ हो, तो $ax + by + cz$ का मूल्य निकालो।
21. यदि $a = x^2 - yz$, $b = y^2 - zx$ और $c = z^2 - xy$ हो, तो $ax + by + cz$ का मान निकालो।
22. $cx + ay + bz$ का मान निकालो।

(iii) यदि किसी बहुपदी व्यंजक को दूसरे बहुपदी व्यंजक से गुणा करना हो, तो पहले व्यंजक के हरएक पद को दूसरे व्यंजक के हरएक पद से गुणा करते हैं और सभी गुणनफलों को एक साथ जोड़ देते हैं।

इसके दो तरीके हैं—

(a) दिये हुए व्यंजकों में किसी एक ही जगह कोई अक्षर मानकर दूसरे व्यंजक से गुणा कर देते हैं और उसके बाद गुणनफल में अक्षर की जगह उसके मान को रख कर इस अध्याय के 21 **(ii)** के नियम के अनुसार पूरा गुणनफल निकाल लेते हैं।

(b) व्यंजकों के पदों को आरोही या अवरोही क्रम से सिल-सिलेवार रखकर व्यंजकों को ऊपर-नीचे लिखते हैं और इसके नीचे एक सीधी रेखा खींच देते हैं। इसके वाद नीचेवाले व्यंजक की बाँयीं ओर के पहले पद से ऊपर वाले व्यंजक के प्रत्येक पद को गुणा कर गुणनफल को सीधी रेखा में लिखते हैं; फिर नीचे के व्यंजकों की दूसरी ओर इसी तरह सभी पदों से ऊपर के व्यंजक के सजे पदों को गुणा करके गुणनफल को इस तरह रखते हैं कि सजातीय पद ऊपर-नीचे के एक कतार में आ जायँ। अन्त में, नीचे एक लकीर खींचते हैं और दोनों लकीरों के बीच सभी पदों को जोड़ देते हैं। यही जोड़ दोनों व्यंजकों का गुणनफल होता है।

उदाहरण 1. $(x+a)$ को $(y+b)$ से गुणा करो।

तरीका (a) के अनुसार,

माना कि $x+a=m$

तब गुणनफल $=(x+a)\times(y+b)$

$=m\times(y+b)$

$=my+mb$

$=(x+a)y+(x+a)b$

$=xy+ay+xb+ab$

तरीका (b) के अनुसार,

$x+a$ (गुणा किया जाने वाला व्यंजक)

$y+b$ (गुणा करने वाला व्यंजक)

——— (सीधी लकीर)

$xy+ay$ (y से गुणा करने पर गुणनफल)

$+bx+ab$ (b से ,, ,,)

———————— (दूसरी रेखा)

$xy+ay+bx+ab$ (सभी पदों का जोड़)

$\therefore$ गुणनफल $=xy+ay+bx+ab.$ उत्तर

उदाहरण 2. $a^2 + ab + b^2$ को $a - b$ से गुणा करो।

क्रिया—
$$\begin{array}{r} a^2 + ab + b^2 \\ a - b \\ \hline a^3 + a^2b + ab^2 \qquad \\ - a^2b - ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 + 0 + 0 - b^3 \end{array}$$

∴ इष्ट गुणनफल $= a^3 - b^3$. उत्तर

उदाहरण 3. $x^2 - xy + y^2$ को $x^2 + xy + y^2$ से गुणा करो।

क्रिया—
$$\begin{array}{r} x^2 - xy + y^2 \qquad\qquad \\ x^2 + xy + y^2 \qquad\qquad \\ \hline x^4 - x^3y + x^2y^2 \qquad\qquad \\ + x^3y - x^2y^2 + xy^3 \qquad \\ + x^2y^2 - xy^3 + y^4 \\ \hline x^4 + 0 + x^2y^2 + 0 + y^4 \end{array}$$

∴ इष्ट गुणनफल $= x^4 + x^2y^2 + y^4$. उत्तर

उदाहरण 4. सरल करो—

$$(x + y + z)(x - y - z) - (x + y - z)(x - y + z)$$

क्रिया—
$$\begin{array}{l} \quad x + y + z \\ \quad x - y - z \\ \hline x^2 + xy + xz \\ \qquad - xy \qquad - y^2 - yz \\ \qquad\qquad - xz \qquad - yz - z^2 \\ \hline x^2 + 0 + 0 + y^2 - 2yz - z^2 \end{array}$$

अतः $(x + y + z)(x - y - z) = x^2 + y^2 - 2yz - z^2$

फिर

$$\begin{array}{llll} & x+y-z & & \\ & x-y+z & & \\ \hline & x^2+xy-xz & & \\ & \quad -xy & -y^2-yz & \\ & \quad +xz & +yz-z^2 & \\ \hline & x^2+0 & +0-y^2+2yz-z^2 & \end{array}$$

अतः $(x+y-z)(x-y+z)=x^2-y^2+2yz-z^2$

$\therefore$ $(x+y+z)(x-y-z)-(x+y-z)(x-y+z)$

$=x^2-y^2-2yz-z^2-x^2+y^2-2yz+z^2$

$=-4yz.$ उत्तर

EXAMPLE 12

गुणा करो—

1. $a+b$ को $c+a$ से
2. $a-b$ को $c-a$ से
3. $a+b$ को $c-a$ से
4. $a-b$ को $c+a$ से
5. $2a+3b$ को $2a-3b$ से
6. $3a-5b$ को $3a+5b$ से
7. $a+b+c$ को $a-b+c$ से
8. $a+b-c$ को $a+b+c$ से
9. a^2+ab+b^2 को $a-b$ से
10. $ab+ac+bc$ को $ab+ac-bc$ से
11. a^2-ab+b^2 को $a+b$ से
12. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ को $a+b+c$ से
13. $a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$ को $a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$ से

सरल करो—

14. $(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)$
15. $(a+b+c)(a-b+c)+(a-b-c)(a+b-c)$
$\qquad +(a-b+c)(a-b-c)$

16. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$

17. $(a+b)(a^2-ab+b^2)+(a-b)(a^2+ab+b^2)+(c-a)(c^2+ca+a^2)$

18. $4(a+3)(a+5)-3(a+1)(a+3)-(a+4)(a+5)$

(iv) वितत गुणनफल (Continued Product)—जब दो से अधिक राशियों को एक साथ गुणा किया जाय, तो उसका गुणनफल वितत गुणनफल कहलाता है।

वितत गुणनफल निकालने के लिए सर्वप्रथम पहली और दूसरी राशियों का गुणनफल निकालकर उसे तीसरी राशि से गुणा कर दिया जाता है। इसी तरह जितनी भी राशियाँ हों यही क्रम जारी रहता है।

उदाहरण—वितत गुणनफल निकालो—

$\mathbf{a+b;\ a-b}$ **और** $\mathbf{a^2+b^2}$

(i)

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \qquad \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \qquad -b^2 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{r} a^2-b^2 \\ a^2+b^2 \\ \hline a^4-a^2b^2 \qquad \\ +a^2b^2-b^4 \\ \hline a^4 \qquad\qquad -b^4 \end{array}$$

$\therefore$ इष्ट गुणनफल a^4-b^4

EXAMPLE 13

इनका वितत गुणनफल निकालो—

1. $x+y$, $x-y$ और x^2+y^2
2. x^3+y^3, x^3-y^3 और x^6+y^6

3. $x+y$, $x-y$ और $x^4+x^2y^2+y^4$

4. $x+2a$, $x-2a$ और x^2+4a^2

5. $x^2+3xy+y^2$, $x^2-3xy+y^2$ और $x^4+7x^2y^2+y^4$

6. $a+b$, $a-b$, a^2+b^2 और a^4+b^4

7. x^2+y^2, x^2-y^2, x^4+y^4 और x^8+y^8

इनको सरल करो—

8. $(x+2)(x+3)+(x-3)(x-4)$

9. $(x+1)(x+2)-(x+3)(x+4)+(x+5)(x+6)$

10. $(x+3)(x+4)(x+5)-(x+1)(x+2)(x+3)$

11. $(a+b-c)(a-b)+(a-b+c)(a+b)-(a+b+c)(a-b)$

12. $(x+y)(x^2-xy-y^2)-(x-y)(x^2+xy+y^2)$

13. x^2+x+1, x^2-x+1, x^4-x^2+1 और x^8-x^4+1

(P.U. 18)

14. x^4+16y^4, x^2+4y^2, $x+2y$, $x-2y$ (P.U. 18)

15. $a+b+c$, $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$

(P.U. 27A, 36A, 39S, 46S)

16. साबित करो कि

$$a(b-c)(1+bc)+b(c-a)(1+ca)+c(a-b)(1+ab)=0$$

17. साबित करो कि

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(=a^{16}-b^{16}$$

सात

भाग

(Division)

21. गुणा की उल्टी क्रिया का नाम भाग है। गुणा में दो राशियाँ रहती हैं, जिनका गुणनफल निकालना होता है। भाग में दो राशियों का गुणनफल और इनमें से एक राशि दी रहती है और दूसरी राशि को निकालना पड़ता है। दिया हुआ गुणनफल जिनमें भाग देना होता है, भाज्य (*Dividend*), दी हुई राशि जिससे भाग देना होता है, भाजक (*Divisor*) और भाग देने पर जो राशि निकलती है, वह भजनफल (*Quotient*) कहलाती है। कभी-कभी भाग करने में कुछ बाकी बच जाता है जिसे शेषफल (*Remainder*) कहते हैं।

जैसे, $ab+c$ को b से भाग देना हो, तो $ab+c$ भाज्य, b भाजक और भाग देने के बाद c बाकी बच जायगा, जिसे शेषफल कहेंगे।

नोट—भजनफल = (भाज्य − शेषफल) ÷ भाजक।
भाज्य = भाजक × भजनफल + शेषफल।
भाजक = (भाज्य − शेषफल) ÷ भजनफल।

22. चिन्हों के नियम—

अगर भाज्य और भाजक दोनों सामान चिन्हों के हों, तो भजनफल धन राशि होता है, और अगर दोनों असनान चिन्हों के हों तो भजनफल ऋण राशि होता है।

जैसे—(i) $ab \div a = +b$

(ii) $-ab \div a = -b$

(iii) $-ab\div(-a)=+b$

(iv) $ab\div(-a)=-b$

23. घतांकों का नियम—

$\because \quad a^8=a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a$

और $a^5=a\times a\times a\times a\times a$

$$\therefore \quad a^8\div a^5=\frac{a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a}{a\times a\times a\times a\times a}$$

$$=a\times a\times a=a^3=^8=^{8-5}$$

अतः अगर किसी राशि के एक घात को उसी राशि के दूसरे घात से भाग देना हो, तो भाज्य के घातांक में से भाजक के घातांक को घटा लेते हैं।

नोट—(i) $\frac{a^m}{a^n}=a^m\div a^n=a^{m-n}$

(ii) दिखाओ कि $a^0=1$

स्पष्टतः $a^m\div a^m=1$

$\therefore \quad \frac{a^m}{a^m}=1$

$\therefore \quad a^{m-m}=1$

अर्थात् $a^0=1$

24. भाग देने के तरीके—

(i) एक पदी व्यंजक को एक पदी व्यंजक से भाग देना—

पहले भाज्य के संख्यक गुणक को भाजक के संख्यक गुणक से भाग देते हैं। इससे भजनफल का संख्यक गुणक मालूम हो जाता है। फिर भाज्य के प्रत्येक अक्षर के घातांक में से भाजक के समान अक्षर के घातांक को घटा देते हैं। इससे भजनफल के प्रत्येक अक्षर का घातांक मालूम हो जाता है अन्त में ऊपर के नियमों के अनुसार यथोचित चिन्ह दे दिये जाते हैं।

उदाहरण 1. $16x^6y^3$ को $4x^2y^3$ से भाग दो ।

$$\text{भजनफल} = \frac{16x^6y^3}{4x^2y^2} = \frac{16}{4} \cdot \frac{x^6}{x^2} \cdot \frac{y^3}{y^2}$$

$$= 4 \cdot a^{6-2} \cdot y^{3-2} = 5x^4y. \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 2. $-32x^9y^3$ को $8x^6y^3$ से भाग दो ।

$$\text{भजनफल} = \frac{-32x^9y^3}{8x^6y^2} = -\frac{32}{8} \cdot \frac{x^9}{x^6} \cdot \frac{y^3}{y^2}$$

$$= -4 \cdot x^{9-6} \cdot y^{3-2}$$

$$= -4x^3 \cdot y \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 3. $-81m^{13}n^{14}p^5$ में $27m^8n^8p^4$ से भाग दो ।

$$\text{भजनफल} = -\frac{81}{27} \times \frac{m^{13}}{m^8} \times \frac{n^{14}}{n^8} \times \frac{p^5}{p^4}$$

$$= -\frac{27 \times 3}{27} \times \frac{m^8 \times m^5}{m^8} \times \frac{n^8 \times n^6}{n^8} \times \frac{p^4 \times p}{p^4}$$

$$= -3 \times m^5 \times n^6 \times p = -3m^5n^6p. \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 4. $-69a^7b^4c^9$ में $-23a^5b^4c^7$ से भाग दो ।

$$\text{भजनफल} = \frac{-69}{-23} \times \frac{a^7}{a^5} \times \frac{b^4}{b^4} \times \frac{c^9}{c^7}$$

$$= \frac{23 \times 3}{23} \times \frac{a^5 \times a^2}{a^5} \times \frac{b^4}{b^4} \times \frac{c^7 \times c^2}{c^7}$$

$$= 3 \times a^2 \times 1 \times c^2 = 3a^2c^2. \quad \text{उत्तर}$$

EXAMPLE 14

भाग दो—

1. $18x^6$ को $3x^2$ से
2. $10a^3$ को $-2a$ से
3. $-16x^2$ को $-4x^2$ से
4. $60x^5y^4z^3$ को $-15x^2y^2z^2$ से
5. $20x^4y^3$ को $-5xy^2$ से
6. $-36x^3y^5z^4$ को $12x^3yz^2$ से
7. $60x^6y^5z^4$ को $-5x^3y^2z$ से
8. $-20a^5b^7$ को $5a^2b^2$ से
9. $-64a^{10}y^7z^6$ को $16x^4y^3z^5$ से
10. $36a^{90}y^{90}$ को $-2a^{70}y^{20}$ से

11. $\dfrac{32x^3y^3z^3}{-8xyz}$

12. $\dfrac{-64x^{10}y^8z^6}{8x^6y^6z^4}$

13. $\dfrac{a^3b^3c^3}{abc}$

14. $\dfrac{-81ab^3c}{27bc}$

15. $\dfrac{35a^4b^8c^2}{-7a^2bc^2}$

16. $\dfrac{625m^{10}n^{12}p^{14}}{-25m^6n^7p^8}$

17. $\dfrac{-63x^{24}y^{19}z^{22}}{-9x^{20}y^{10}z^{12}}$

18. $\dfrac{225a^{27}b^{30}c^{29}}{-15a^{18}b^{15}c^{16}}$

19. $\dfrac{-330a^{25}b^{26}}{33a^{16}b^{14}}$

20. $\dfrac{650x^9y^{10}z^{11}}{113x^3y^4z^5}$

(ii) बहुपदी व्यंजक को एकपदी व्यंजक से भाग देना—

भाज्य के हरएक पद को भाजक से अलग-अलग भाग देने पर कई आंशिक भजनफल *(Partial quotients)* आते हैं, जिन्हें जोड़ देने से पूरा भजनफल *(Complete quotients)* निकल आते है।

उदाहरण 1. $18a^4b^2-10a^3b^3+4a^2b^2$ को $2ab$ से भाग दो।

$$\text{भजनफल} = \frac{18a^4b^2-10a^3b^3+4a^2b^2}{2ab}$$

$$=\frac{18}{2}\cdot\frac{a^4}{a}\cdot\frac{b^2}{b}-\frac{10}{2}\cdot\frac{a^3}{a}\cdot\frac{b^3}{b}+\frac{4}{2}\cdot\frac{a^2}{a}\cdot\frac{b^2}{b}$$

$$=9\cdot a^{4-1}\cdot b^{2-1}+5a^{3-1}\cdot b^{3-1}+2a^{2-1}\cdot b^{2-1}$$

$$=9a^3b-5a^2b^2+2ab$$

उदाहरण 2. $9a^3b^2c^4-15a^2b^3c^5-21a^4b^4c^3$ को $3abc^2$ से भाग दो।

$$\text{भजनफल}=\frac{9a^3b^2c^4-15a^2b^3c^5-21a^4b^4c^3}{3abc^2}$$

$$=\frac{9}{3}\cdot\frac{a^3}{a}\cdot\frac{b^2}{b}\cdot\frac{c^4}{c^2}-\frac{15}{3}\cdot\frac{a^2}{a}\cdot\frac{b^3}{b}\cdot\frac{c^5}{c^2}$$

$$-\frac{21}{3}\cdot\frac{a^4}{a}\cdot\frac{b^4}{b}\cdot\frac{c^3}{c^2}$$

$$=3\cdot a^{3-1}\cdot b^{2-1}\cdot c^{4-2}-5\cdot a^{2-1}\cdot b^{3-1}\cdot c^{5-2}$$

$$-7\cdot a^{4-1}\cdot b^{4-1}\cdot c^{3-2}$$

$$=3a^2bc^2-5ab^2c^3-7a^3b^3c.$$ उत्तर

EXAMPLE 15

भाग दो—

1. $16a^3b-10a^2b^3+6ac^2$ को $2ab$ से
2. $-10x^3y^4-15x^4y^5+20x^5y^6$ को $-5x^2y^2$ से
3. $10a^3b^4-25a^7b^3+15a^5b^5$ को $5a^2b^3$ से
4. $ab+ac$ को a से
5. $-12x^2y+6xy^2$ को $-6xy$ से
6. $10x^3y^3-15x^6y^4$ को $-5xy$ से
7. $-14x^6y^4+21x^5y^3$ को $-7x^2y^2$ से

8. $20a^4b^2c^4 - 35a^3b^4c^2 + 45a^2b^5c^7$ को $5a^2b^2c^2$ से

9. $80a^3b^4c^2 - 128a^5b^5c^5 + 144a^6b^6c^7$ को $16a^2b^2b^2$ से

10. $120x^6 - 100x^4 + 10x^3$ को $10x^3$ से

11. $12a^3b^3 - 8a^4b^4 - 4a^5b^5$ को $- 2a^2 - b^2$ से

12. $- 4a^5 + 2a^4 - 6a^3 - 2a^2$ को $- 2a^2$ से

13. $- 4mn^3 - 12m^2n^2 + 16m^3n$ को $4mn$ से

14. $125m^6n^4p^2 - 175m^4n^6p^2 - 200m^2n^2p^8$ को $25m^2n^2p^2$ से

15. $- 2a^4b^4c^4x^4y^4z^2 + 2a^4b^2c^4x^2y^4z^4 - 6a^4b^4c^2x^4y^2z^4$ को $- 2a^2b^2c^2x^2y^3z^2$ से

(iii) एक बहुपदी व्यंजक को दूसरे बहुपदी व्ययंक से भाग देना

(a) भाज्य और भाजक के पदों को किसी साधारण अक्षर के आरोही या अवरोही घातों (*Ascending or descending power*) के अनुसार क्रम से लिख लो।

(b) भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग दो और जो आंशिक भजनफल आवे, उसे भजनफल के स्थान में लिख लो।

(c) पूरे भाजक को भजनफल के पहले पद से गुणा कर लो और गुणनफल को भाज्य के नीचे लिखकर घटा लो।

(d) शेषफल के साथ भाज्य के पदों में से जितने पदों की जरूरत हो, लिख लो। फिर ऊपर के नियम से भाजक से भाग दो, जब तक कि भाज्य के सभी पद खतम न हो जायँ। आंशिक भजनफलों का योगफल पूरा भजनफल होता है।

उदाहरण 1. $3x^3 + 5x^2 - 3x - 38$ को $x - 2$ से भाग दो।

यहाँ x के घात अवरोही क्रम में हैं।

भाज्य $= 3x^3 + 5x^2 - 3x - 38$ और भाजक $x - 2$

भाजक   भाज्य   भागफल

$$
\begin{array}{l|l|l}
x-2 & 3x^3+5x^2-3x-38 & 3x^2+11x+19 \\
 & 3x^3-6x^2 & \\
 & -\quad + & \\
 & \overline{\quad 11x^2-3x} & \\
 & \quad 11x^2-22x & \\
 & \quad -\quad + & \\
 & \quad\overline{\quad 19x-38} & \\
 & \quad\quad 19x-38 & \\
 & \quad\quad -\quad + & \\
 & \quad\quad\overline{\times\quad\times} &
\end{array}
$$

$\therefore$ भजनफल $= 3x^2+11x+19$ उत्तर

उदाहरण 2. $\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{125}y^3$ को $-\frac{1}{10}xy+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{25}y^2$ से भाग दो।

भाजक   भाज्य   भागफल

$$
\begin{array}{l|l|l}
\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{10}xy+\frac{1}{25}y^2 & \frac{1}{8}x^3+\frac{1}{125}y^3 & \frac{1}{2}x+\frac{1}{5}y \\
 & \frac{1}{8}x^3-\frac{1}{20}x^2y+\frac{1}{50}xy^2 & \\
 & -\quad + \quad - & \\
 & \overline{\frac{1}{20}x^2y-\frac{1}{50}xy^2+\frac{1}{125}y^3} & \\
 & \frac{1}{20}x^2y-\frac{1}{50}xy^2+\frac{1}{125}y^3 & \\
 & -\quad + \quad - & \\
 & \overline{\times\quad\times\quad\times} &
\end{array}
$$

भजनफल $= \frac{1}{2}x+\frac{1}{5}y$ उत्तर

उदाहरण 3. c की कीमत क्या होगी कि $x^3+5x^2+13x+c$ में $x+2$ का पूरा-पूरा भाग लग जाय।

भाजक भाज्य भागफल

$$
\begin{array}{r|l|l}
x+2 & x^3+5x^2+13x+c & x^2+3x+7 \\
 & x^3+2x^2 & \\
 & -\quad - & \\
\hline
 & 3x^2+13x & \\
 & 3x^2+6x & \\
 & -\quad - & \\
\hline
 & 7x+c & \\
 & 7x+14 & \\
 & -\quad - & \\
\hline
 & c-14 &
\end{array}
$$

जब भाज्य में भाजक से पूरा-पूरा भाग लग जायगा तो शेष अवश्य ही शून्य होगा।

अतः $c-14=0$

$\therefore$ $c=14$ उत्तर

EXAMPLE 16

भाग दो

1. $2x^2+3-7x$ को $x-3$ से
2. x^2+8-6x को $x-4$ से
3. x^2-y^2 का $x-y$ से
4. a^3b+ab^2 को ab से
5. $a^2bc+ab^2c+abc^2$ को abc से
6. x^2+3x-4 को $x-1$ से
7. x^2-5x+4 को $x-4$ से
8. $x^2+3x-10$ को $x-2$ से
9. $6x^3-25x^2+28x-49$ को $2x-7$ से
10. $18a^3b^3c^5d^2+30a^4b^5c^3d-12a^3b^2c^2$ को $6a^2b^2c$ से
11. $x^4-8x^3y+24x^2y^2-32xy^3+16y^4$ को $x^2-4xy+4y^2$ से

12. $a^3+b^3+c^3-3abc$ को $a+b+c$ से (P.U. 24A; S.S. 54A)

13. $x^3-y^3+3xy+1$ को $x-y+1$ से (P.U. 40S)

14. $a^3+b^3-3a^2+3a-1$ को $a+b-1$ से

15. $\frac{1}{8}x^3+\frac{8}{27}y^3$ को $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{4}{9}y^2$ से

16. $x^3+8y^3-z^3+6xyz$ को $x+2y-z$ से

17. c को क्या कीमत होगी कि $x^3+2x^2+cx+18$ में $x+3$ का पूरा-पूरा भाग लग जाय।

18. p को क्या कीमत होगी कि $x^3-2(p+2)x^2+px+4$ में $(x+2)$ का पूरा-पूरा भाग लग जाय। (P.U. 30S)

19. c का क्या कीमत होने से $x^4-8x^3+17x^2-cx-24$ में x^2-2x-3 से पूरा-पूरा भाग लग जायगा।

20. c का क्या कीमत होने से $2x^5+8x^4+15x^3+15x^2+cx+7$ में x^3+x+1 से पूरा-पूरा भाग लग जायगा।

आठ

सरल सूत्र तथा उनके प्रयोग

(Simple formulae and their application)

25. परिभाषा—

बीजगणितीय संकेतों और चिन्हों द्वारा जो साधारण परिणाम (*General*) (*result*) प्रकट किये जाते हैं, उन्हें बीजगणितीय सूत्र (*Algebraical formulae*) अथवा संक्षेप में केवल सूत्र (*Formulae*) कहते हैं। इसके द्वारा मिश्र व्यंजकों के विभिन्न घात या गुणनफल बिना गुणा किये आसानी से निकाल लिये जाते हैं।

26. सूत्र 1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a(a+b) + b(a+b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2 \qquad [\because ab = ba]$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

अत: दो राशियों के योग का वर्ग, प्रत्येक के वर्ग का योग और उनके गुणन फल के दूने के योग के बराबर होता है।

उप-सूत्र 1— $\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

दोनों तरफ $2ab$ घटाने पर,

या, $(a+b)^2 - 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$

$\therefore \quad (a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. $5x + 3y$ का वर्ग निकालो।

माना कि $5x = a$ और $3y = b$,

$$\therefore \quad (5x+3y)^2 = (a+b)^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$
$$= (5x)^2 + 2\cdot(5x)\cdot(3y) + (3y)^2$$
$$= 25x^2 + 30xy + 9y^2. \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 2. $2x^2 + 3y^2$ का वर्ग निकालो ।

$$(2x^2+3y^2)^2 = (2x^2)^2 + 2\cdot(2x^2) + (3y^2) + (3y^2)^2$$
$$= 4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4. \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 3. $6xy + 9ab$ का वर्ग निकालो ।

$$(6xy+9ab)^2 = (6xy)^2 + 2\cdot(6xy)\cdot(9ab) + (9ab)^2$$
$$= 36x^2y^2 + 108xyab + 81a^2b^2$$

उत्तर

उदाहरण 4. $x + y + z$ का वर्ग निकालो ।

यहाँ पर तीन पद हैं । लेकिन सूत्र (26) सिर्फ दो पदों के जोड़ के वर्ग में लागू होता है; अतः इन तीनों पदों को दो पद करने पड़ेंगे । किन्हीं दो को एक कोष्ठक के अन्दर दे देने से ही दो पदों का एक पद हो जायगा ।

$$\text{अतः} \quad (x+y+z)^2 = \{x+(y+z)\}^2$$
$$= x^2 + 2x(y+z) + (y+z)^2$$
$$= x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2$$
$$= x^2 + y^3 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz. \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 5. $x + y + z + w$ का वर्ग निकालो ।

यहाँ पर चार पद हैं । लेकिन सूत्र (26) सिर्फ दो पदों के जोड़ के वर्ग में लागू होता है; इन चारो पदों को दो पद करने पड़ेंगे । किन्हीं दो-दो को एक-एक कोष्ठक के अन्दर दे देने से ही दो-दो पदों का एक-एक पद हो जायगा ।

अतः $(x+y+z+w)^2 = \{(x+y)+(z+w)\}^2$
$= (x+y)^2 + 2(x+y)(z+w) + (z+w)^2$
$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2xw + 2yz + 2yw + z^2 + 2zw + w^2$
$= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2xw + 2yw + 2zw.$ उत्तर

उदाहरण 6. $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2 + 2(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}) + (\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c})^2$ को सरल करो।

माना कि $a+b+c=x$ और $a+b-c=y$, तो

दी हुई राशि $= x^2 + 2xy + y^2$
$= (x+y)^2$
$= (a+b+c+a+b-c)^2$
$= (2a+2b)^2$
$= (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 2b + (2b)^2$
$= 4a^2 + 8ab + 4b^2.$ उत्तर

उदाहरण 7. अगर $a=2$, $b=3$ हो, तो $4\mathbf{a}^2 + 12\mathbf{ab} + 9\mathbf{b}^2$ का मान बताओ।

दी हुई राशि $= (2a)^2 + 2(2a) \cdot (3b) + (3b)^2$
$= (2a+35)^2$
$= (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3)^2$
$= (4+9)^2$
$= 13^2 = 169$ उत्तर

उदाहरण 8. अगर $a+b=5$ और $ab=6$ हो, तो a^2+b^2 का मान बताओ।

उप-सूत्र (26) से,

$$\because a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

$$=(5)^2-2\cdot 6$$

$$=25-12=13$$ उत्तर

उदाहरण 9. यदि $x+\frac{1}{x}=4$ हो, तो

(i) $x^2+\frac{1}{x^2}$ का मान बताओ।

(ii) $x^4+\frac{1}{x^4}$ का मान बताओ।

(i) $\because a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$$\therefore x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}$$

या, $x^2+\frac{1}{x^2}=4^2-2$

$$=16-2=14.$$ उत्तर

(ii) $\because x^2+\frac{1}{x^2}=14$ {प्रश्न 9 (i) से}

$$\therefore \left(x^2\right)^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2x^2\cdot\frac{1}{x^2}$$

या, $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2$

$=14^2-2$

$=196-2=194.$ उत्तर

उदाहरण 10. सरल करो—

$8{\cdot}326\times8{\cdot}326+2\times8{\cdot}326\times5{\cdot}674+5{\cdot}674\times5{\cdot}674$

माना कि $8{\cdot}326=a$ और $5{\cdot}674=b$,

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=a\times a+2a\times b+b\times b$

$=a^2+2ab+b^2$

$=(a+b)^2$

$=(8{\cdot}326+5{\cdot}674)^2$

$=(14)^2$

$=196$ उत्तर

EXAMPLE 17

निम्नलिखित का वर्ग निकालो—

1. $a+2$
2. $3x+2$
3. $3x+2y$
4. $2m+3n$
5. $ab+cd$
6. x^2+y^2
7. $x+\frac{1}{x}$
8. $x^2+\frac{1}{x^2}$
9. $a+b+c$
10. $a^2+b^2+c^2$
11. $a+b+c+d$
12. $ab+ac+cd+bc$
13. $4m+3n+3p+2q$

इनको सरल करो—

14. $(a+b)^2+2(a+b)(a-b)+(a-b)^2$
15. $(3x+2y)^2+2(3x+2y)(3x-2y)+(3x-2y)^2$

16. $(x+y-z)^2+(x-y+z)^2+2(x+y-z)(x-y+z)$

17. $(3a-2b+4c)^2+(3a+2b-4c)^2$
$+2(3a-2b+4c)(3a+2b-4c)$

18. $(4a+5b+7)^2+(4a-5b-7)^2$
$+2(4a+5b+7)(4a-5b-7)$

मान बताओ—

19. $4x^2+24x+36$, जबकि $x=-2$ हो।

20. $16a^2+64ab+64b^2$, जबकि $a=-2$, $b=1$ हो।

21. $25x^2+40xy+16y^2$, जबकि $x=10$, $y=5$ हो।

22. $100x^2+180xy+81y^2$, जबकि $x=5$, $y=2$ हो।

23. $9x^2+12x+4$, यदि $x=-1$ हो।

24. $16x^2+64x+64$, यदि $x=-2$ हो।

25. $49x^2+56xy+16y^2$, यदि $x=-7$ और $b=13$ हो।

26. $64x^2+16xy+y^2$, यदि $x=6$ और $y=49$ हो।

27. $81a^2+18ab+b^2$, यदि $a=7$ और $b=67$ हो।

28. $36p^2+132pq+121q^2$, यदि $p=12$ और $q=-7$ हो।

29. $1{\cdot}79\times1{\cdot}79+2\times1{\cdot}79\times2{\cdot}21+2{\cdot}21\times2{\cdot}21$

30. $\dfrac{6{\cdot}537\times6{\cdot}537+2\times6{\cdot}537\times3{\cdot}463+3{\cdot}463\times3{\cdot}463}{6{\cdot}537+3{\cdot}463}$

31. $\dfrac{5{\cdot}325\times5{\cdot}325+2\times5{\cdot}325\times4{\cdot}475+4{\cdot}475\times4{\cdot}475}{5{\cdot}325+4.475}$

32. $\dfrac{425\times425+2\times425\times375+375\times375}{425+375}$

33. यदि $a+\dfrac{1}{a}=2$ हो, तो दिखाओ कि $a^2+\dfrac{1}{a^2}=2$

34. यदि $a + \frac{1}{a} = 2$ हो, तो दिखाओ कि $a^4 + \frac{1}{a^4} = 2$

35. यदि $x + \frac{1}{x} = 4$ हो, तो दिखाओ कि $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$

36. यदि $p + \frac{1}{p} = \sqrt{2}$ हो, तो दिखाओ कि $p^2 + \frac{1}{p^2} = 0$

और $p^4 + \frac{1}{p^4} = -2$

37. यदि $x + \frac{1}{x} = p$ हो, तो दिखाओ कि $x^2 + \frac{1}{x^2} = p^2 - 2$

38. यदि $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 6$ हो, तो दिखाओ कि $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 34$

39. साबित करो कि $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (1 + x^2)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

40. यदि $x = a + \frac{1}{a}$ और $y = a^2 + \frac{1}{a^2}$ तो साबित करो कि

$$x^4 + y^4 - 2x^2 y^2 = 4$$

41. दिखलाओ कि $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z)$ एक पूर्ण वर्ग है।

42. यदि $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = 8$ हो, तो दिखलाओ कि $\frac{p^2}{q^2} + \frac{q^2}{p^2} = 62$

43. यदि $a = x + \frac{1}{x}$ और $b^2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$, तो साबित करो कि

$$a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = 4$$

44. यदि $m + \frac{1}{m} = 4$ हो, तो दिखलाओ कि $m^2 + \frac{1}{m^2} = 14$

27. सूत्र II $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$[(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$= a(a-b) - b(a-b)$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2 \qquad (\because ab = bu)$$
$$= a^2 - 2ab + b^2]$$

अतः दो राशियों का अन्तर का वर्ग उनके वर्ग के योग में से उनके गुणनफल के दूने को घटाने से प्राप्त होता है।

उप-सूत्र II—

$\because \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

दोनों तरफ $2ab$ जोड़ने पर,

$(a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2 - 2ab + 2ab$

या, $(a-b)^2 = a^2 + b^2$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. $3a - 2b$ का वर्ग निकालो।

$$(3a-2b)^2 = (3a)^2 - 2(3a)\ (2b) + (2b)^2$$
$$= 9a^2 - 12ab + 4b^2$$

उदाहरण 2. $x - y - z$ का वर्ग निकालो।

$$(x-y-z)^2 = \{x - (y+z)\}^2$$
$$= x^2 - 2x(y+z) + (y+z)^2$$
$$= x^2 - 2xy - 2xz + (y^2 + 2yz + z^2)$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz$$

उदाहरण 3. $(a - b - c - d)$ का वर्ग निकालो।

$$(a-b-c-d)^2 = \{(a-b) - (c+d)\}^2$$
$$= (a-b)^2 - 2(a-b)\ (c+d) + (c+d)$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 - 2a(c+d) + 2b(c+b) + c^2 + 2cd + d^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab - 2ac - 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$ उत्तर

उदाहरण 4. $(a+b+c)^2 + (a-b-c^2) - 2(a+b+c)(a-b-c)$ को सरल करो।

माना कि $a+b+c = x$ और $a-b-c = y$,

$\therefore$ दी हुई राशि $= x^2 - 2xy + x^2$

$= (x-y)^2$

$= (a+b+c-a+b+c)^2$

$= (2b+2c)^2$

$= (2b)^2 + 2b \cdot 2c + (2c)^2$

$= 4b^2 + 8bc + 4c^2$ उत्तर

उदाहरण 5. अगर $x = 10$, $y = 3$ हो, तो $x^2 - 6xy + 9y^2$ का मान निकालो'

दी हुई राशि $= x^2 - 6xy + 9y^2$

$(x)^2 - 2 \cdot x \cdot 3y + (3y)^2$

$= (x - 3y)^2$

$= (10 - 3 \cdot 3)^2$

$= (10 - 9)^2$

$= 1$ उत्तर

उदाहरण 6. यदि $a - b = 5$ और $ab = 8$, तो $a^2 + b^2$ का मान बताओ।

उप-सूत्र 27.(ii) से,

$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

$= (5)^2 + 2 \cdot 8$

$= 25 + 16 = 41$ उत्तर

उदाहरण 7. यदि $a - \frac{1}{a} = 6$ हो, तो

(i) $a^2 + \frac{1}{a^2}$ का मान बताओ ।

(ii) $a^4 + \frac{1}{a^4}$ का मान बताओ ।

(i) $\because \quad a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2a \cdot b$

$$\therefore \quad (a)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2a \cdot \frac{1}{a}$$

या, $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2$

$$= 6^2 + 2 = 38$$

(ii) $\because \quad a^2 + \frac{1}{a^2} = 38$ [प्रश्न 7 (i) से]

$$\therefore \quad (a^2)^2 + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 2a^2 \cdot \frac{1}{a^2}$$

या $a^4 + \frac{1}{a^4} = 38^2 - 2$

$$= 1444 - 2$$
$$= 1442 \text{ उत्तर}$$

EXAMPLE 18

निम्नलिखित राशियों का वर्ग निकालो —

1. $a - b$ 2. $x - 3$ 3. $2a - 3b$
4. $4 - 3x$ 5. $xy - 2$ 6. $-a - b$

7. $2m - 3n$ 8. $2a^2 - 3b^2$ 9. $a - \frac{1}{a}$

10. $xy - \frac{1}{xy}$ 11. $a - b - 2c$ 12. $a - b - c - d$

निम्नलिखित को सरल करो—

13. $(2x - y)^2 + (x - 2y)^2$

14. $(2x - 3y + 4z)^2 + (2x - 3y - 4z)^2$

15. $(a - b + c - d)^2 + (a + b - c + d)^2$

16. $(x + 4y)^2 - 2(x + 4y)(x - 4y) + (x - 4y)^2$

17. $(a - 2b + 3c)^2 - 2(a - 2b + 3c)(a - 4b + 3c) + (a - 4b + 3c)^2$

18. $(ax - by - cz)^2 - 2(ax - by - cz)(ax - by + cz) + (ax - by + cz)^2$

इनका मान बताओ जब कि $x = 7$ तथा $y = 4$.

19. $9x^2 - 30xy + 25y^2$ 20. $x^2y^2 - 8xy^2 + 16y^2$

21. $4(x + y)^2 - 24(x + y) + 36$

22. $(2x + 3y)^2 - 2(2x + 3y)(4x + 5y) + (4x + 5y)^2$

23. $4x^2 - 32xy + 64y^2$ 24. $9x^2 - 24xy + 16y^2$

25. $9x^2 - 48xy + 64y^2$ 26. $36x^2 - 96xy + 64y^2$

27. $4a^2 - 12ab + 9b^2$ जबकि $a = 3$, $b = 2$

28. $x^2y^2 - 24xyz + 144z^2$ जबकि $x = 8$, $y = 14$, $z = 10$

29. $25(x + y)^2 + z^2 - 10z(x + y)$, यदि $x = 47$, $y = -22$ और $z = 129$ हो।

30. $9c^2 - 42c(a + b) + 49(a + b)^2$, यदि $a = 37$, $b = 57$ और $c = 45$ हो।

31. $64(7p-5q)^2-96(7p-5q)r+36r^2$, यदि $p=28$, $q=32$ और $r=46$ हो

32. $264\times 264-2\times 264\times 175+175\times 175$

33. $\dfrac{785\times 785+2\times 785\times 378+378\times 378}{785+378}$

34. अगर $a-\dfrac{1}{a}=5$, तो सिद्ध करो कि $a^2+\dfrac{1}{a^2}=27$

35. अगर $x-\dfrac{1}{x}=7$, तो सिद्ध करो कि $x^2+\dfrac{1}{x^2}=51$

36. अगर $m-n=7$ और $mn=18$ हो, तो m^2+n^2 का मान बताओ।

37. यदि $c-\dfrac{1}{c}=4$ हो, तो सिद्ध करो कि $c^2+\dfrac{1}{a^2}=18$

38. यदि $a=x+\dfrac{1}{x}$ और $b=x-\dfrac{1}{x}$ हो, तो साबित करो कि

$$a^4+b^4-2a^2b^2=16$$

39. a^4+b^4 का मान बताओ जबकि $a-b=3$ और $ab=10$

40. यदि $z-\dfrac{1}{z}=6$ हो, तो सिद्ध करो कि $z^2+\dfrac{1}{z^2}=38$

28. कुछ प्रमुख परिणाम—

I. साबित करना है कि—

(i) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

(ii) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(i) $\because \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

दोनों तरफ $4ab$ जोड़ने पर,

$\therefore \quad (a-b)^2 + 4ab = a^2 + b^2 - 2ab + 4ab$
$= a^2 + b^2 + 2ab$
$= (a+b)^2$

(ii) $\because \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

दोनों तरफ $4ab$ घटाने पर,

$\therefore \quad (a+b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab$
$= a^2 + b^2 - 2ab$
$= (a-b)^2$

II. **(i)** $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)$

(ii) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 4\mathbf{ab}$

(i) $\because \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

और $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$\therefore \quad (a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 - 2ab$
$= 2(a^2 + b^2)$

(ii) और $(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - \{a^2 + b^2 - 2ab\}$
$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$
$= 4ab$

III. $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

पहले साबित किया जा चुका है कि

$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$$

$$\therefore \quad ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $a+b=6$ तथा $ab=8$ हो, तो $a-b$ का मान निकालो।

हम जानते हैं कि $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$$=6^2-4\times 8$$

$$=36-32$$

$$=4$$

$\therefore \quad a-b=\sqrt{4}=2$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $a-b=7$ और $ab=30$ हो, तो $a+b$ का मान निकालो।

हम जानते हैं कि $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

$$=7^2+4\cdot 30$$

$$=49+120$$

$\therefore \quad a+b=\sqrt{169}$

$=13$ उत्तर

उदाहरण 3. यदि $a+b=17$ तथा $a-b=3$, तो a^2+b^2 तथा ab का मान निकालो।

हम जानते हैं कि $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$

$$=17^2+3^2$$

$$=289+9$$

$$=298$$

$\therefore \quad a^2+b^2=\frac{298}{2}=149$ उत्तर

पुनः हम जानते हैं कि

$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$$
$$= 17^2 - 3^2$$
$$= 289 - 9$$
$$= 280$$

$\therefore \quad ab = \frac{280}{4} = 70$ उत्तर

उदाहरण 4. प्रत्येक दशा में a और b का मान बताओ।

(i) $a + b = 17$ तथा $ab = 70$

ii) $a - b = 3$ तथा $ab = 54$

सूत्र (i) से, $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$
$$= 17^2 - 4 \times 70$$
$$= 289 - 280$$
$$= 9$$

$\therefore \quad a - b = \sqrt{9} = 3$

अतः $a + b = 17$

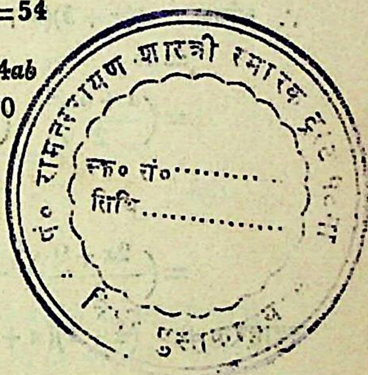
$a - b = 3$

जोड़ने पर, $2a = 20$

$\therefore \quad a = 10$

एवं घटाने पर, $2b = 14$

$\therefore \quad b = 7$



सूत्र (ii) से, $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$
$$= 3^2 + 4 \times 54$$
$$= 9 + 216$$
$$= 225$$

$\therefore \quad a+b=\sqrt{225}$

अतः $\quad a+b=15$

$\quad a-b=3$

जोड़ने पर, $\quad 2a=18$

$\therefore \quad a=9$

एवं घटाने पर, $\quad 2b=12$

$\therefore \quad b=6$

उदाहरण 5. $(x+4)(x+5)$ को दो वर्गों के अन्तर के रूप में लखो।

मान लिया कि $x+5=a$; $x+4=b$.

$\therefore$ व्यंजक $=ab(x+5)(x+4)$

$=ab$

$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{x+5+x+4}{2}\right)^2-\left(\frac{x+5-x-4}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2x+9}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 6. $(x+1)(x+2)(x+3)$ को दो वर्गों के रूप लिखो।

व्यंजक $=(x+1)(x+2)(x+3)=(x^2+3x+2)(x+3)$

$=\frac{1}{4}\{(x^2+3x+2+x+3)^2-(x^2+3x+2-x-3)^2\}$

$=\frac{1}{4}\{(x^2+3x+5)^2-(x^2+2x-1)^2\}$

$$=\left\{\frac{x^2+4x+5}{2}\right\}^2-\left\{\frac{x^2+2x-1}{2}\right\}^2$$

उदाहरण 7. यदि, $x+y+z=$ और $x^2+y^2+z^2=9$ हो, तो $xy+xz+yz$ का मान बताओ।

हम जानते हैं कि $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$

$\therefore \quad 2(xy+xz+yz)=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)$

$=5^2-9$

$=25-9=16$

$\because \quad xy+xz+yz=\frac{16}{2}=8$ उत्तर

उदाहरण 8. यदि $a+b+c=8$ और $a^2+b^2+c^2=40$ हो, तो $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ का मान बताओ।

हम जानते हैं कि $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\therefore \quad 2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$=8^2-40$

$=64-40=24$

$\therefore \quad ab+bc+ca=12$

$\therefore \quad a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=40-12$

$=28.$ उत्तर

EXAMPLE 19

1. यदि $a+b=20$ तथा $ab=99$ हो, तो $a-b$ का मान निकालो।
2. यदि $a+b=15$ तथा $a-b=3$ हो, तो ab का मान निकालो।
3. यदि $x-y=7$ तथा $xy=144$ हो, तो $x+y$ का मान निकालो।
4. यदि $x+y=\sqrt{5}$ तथा $x-y=\sqrt{3}$ हो, तो $8xy(x^2+y^2)$ का मान निकालो।
5. यदि $a+b=20$ तथा $ab=96$ हो, तो $a-b$ का मान निकालो।
6. यदि $a+b=13$ तथा $a-b=5$ हो, तो a^2+b^2 का तथा ab का मान निकालो।
7. यदि $x+y=15$ तथा $x-y=9$ हो, तो x^2+y^2 तथा xy का मान बताओ।

8. यदि $x+y=3\sqrt{2}$ तथा $x-y=2\sqrt{2}$ हो, तो $8xy(x^2+y^2)$ का मान बताओ।

9. यदि $a+b=\sqrt{3}$ तथा $a-b=\sqrt{2}$ हो, तो $8ab(a^2+b^2)$ का मान बताओ।

10. नीचे लिखी हुई राशियों को दो वर्गों के अन्तर के रूप में लिखो।

(i) $4xy$ (ii) ab (iii) $(x+1)(x+3)$
(iv) $(x+2)(x+4)$ (v) $(x+4)(x+5)$
(vi) $(3x+7y)(7x+3y)$ (vii) $(3a-4b)(4a+3b)$
(viii) $4(x+2y)(2x+y)$ (58A)
(ix) $(x+1)(x+3)(x+5)$
(x) $(x+3)(x+7)(x+9)$ (xi) $(x+4)(x+3)^2$
(xii) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$

11. सरल करो—

(i) $(5x+7y)^2-4(3x+4y)(2x+3y)$
(ii) $(x+2y)^2+4(2x+5y)(3x+7y)$ (S. S. 58A)

12. नीचे लिखे हुए व्यंजकों को दो वर्गों के जोड़ के रूप में लिखो।

(i) $(3a+4b)^2-2(a+b)(2a+3b)$
(ii) $(2a+b)^2+2(a+b)(3a+2b)$
(iii) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ को गुणा करके $2abxy$ जोड़ो और घटाओ।

13. प्रत्येक दशा में $x^2+y^2+z^2$ की कीमत निकालो, जब

(i) $x+y+z=9$ और $xy+yz+zx=26$
(ii) $x+y+z=13$ और $xy+yz+zx=48$
(iii) $x+y+z=15$ और $xy+yz+zx=74$
(iv) $x+y+z=15$ और $xy+yz+zx=45$

14. प्रत्येक दशा में $ab + bc + ca$ की कीमत निकालो, जब

(i) $a + b + c = 6$ और $a^2 + b^2 + c^2 = 14$

(ii) $a + b + c = 8$ और $a^2 + b^3 + c^2 = 36$

(iii) $a + b + c = 8$ और $a^2 + b^2 + c^2 = 50$

(iv) $a + b + c = 10$ और $a^2 + b^2 + b^3 = 40$

15. यदि $x^2 + y^2 + z^2 = 29$ और $xy + yz + zx = 26$ हो, तो $x + y + z$ का मान निकालो।

16. (i) यदि $x + y + z = 2$ और $xy + yz + zx = 1$ हो, तो $(y + z)^2 + (z + x)^2 + (x + y)^2$ का मान निकालो।

(ii) यदि $a + b + c = 15$ और $ab + bc + ca = 71$ हो, तो $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ का मान निकालो।

17. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ की कीमत निकालो जब

(i) $a + b + c = 7$ और $a^2 + b^2 + c^2 = 47$

(ii) $a + b + c = 8$ और $a^2 + b^2 + c^2 = 60$

18. यदि $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ हो, तो $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ का मान बताओ।

19. यदि $x = a + b - c$, $y = b + c - a$, $z = a + c - b$ हो, तो $x^2 + y^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ का मान निकालो।

20. साबित करो कि

$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab = \frac{1}{2}\{(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2\}$$

21. (i) अगर $a + b + c = 9$ और $a^2 + b^2 + c^2 = 41$ हो, तो $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 21$

(ii) अगर $a + b + c = 4$ और $a^2 + b^2 + c^2 = 31$ हो, तो $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 6$

22. यदि $x=2$, $y=3$, $z=4$ हो, तो साबित करो कि

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=81$$

23. यदि $x=b+c-2a$, $y=c+a-2b$, $z=a+b-2c$ हो, तो साबित करो कि $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=0$

24. यदि $x=b^3-c^3$, $y=c^3-a^3$, और $z=a^3-b^3$ हो, तो साबित करो कि $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=0$

29. सूत्र III—$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$

$$(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)$$
$$=a^2-ab+ab-b^2 \quad [\because ab=ba]$$
$$=a^2-b^2$$

अतः दो राशियों के जोड़ तथा अन्तर का गुणनफल उन राशियों के वर्गों के अन्तर के बराबर होता है।

उप-सूत्र III—विलोमतः $\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. गुणा करो—$3x+5y$ को $3x-5y$ से।

सूत्र से, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$\therefore$ $(3x+5y)(3x-5y)$

$$=(3x)^2-(5y)^2$$
$$=9x^2-25y^2$$

उदाहरण 2. गुणा करो।

$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ को $\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$ से।

सूत्र से, $(a+b+c)(a-b-c)$

$$=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}$$

$$= a^2 - (b + c)^2$$
$$= a^2 - (b^2 + 2bc + c^2)$$
$$= a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$$

उदाहरण 3. गुणा करो— $x^2 + xy + y^2$ को $x - xy + y^2$ से

सूत्र से, $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

$$= \{(x^2 + y^2) + xy\}\{(x^2 + y^2) - xy\}$$
$$= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$$
$$= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - x^2y^2$$
$$= x^4 + y^4 + x^2y^2$$

उदाहरण 4. वितत गुनणफल निकालो—

$$(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$$

इष्ट गुणनफल $= \{(a + b)(a - b)\}(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$

$$= \{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)\}(a^4 + b^4)$$
$$= (a^4 - b^4)(a^4 + b^4)$$
$$= a^8 - b^8$$

उदाहरण 5. सरल करो— $(x - 2y + 3z)^2 - (x + 2y - 3z)^2$

दिया हुआ व्यंजक, $= \{(x - 2y + 3z)^2 - (x + 2y - 3z)^2\}$

$$= \{(x - 2y + 3z + x + 2y - 3x)\}$$
$$\times \{(x - 2y + 3z - x - 2y + 3z)\}$$
$$= 2x \times (6x - 4y)$$
$$= -4x(2y - 3z)$$

उदाहरण 6. गुणनखण्ड निकालो— $16a^4 - 81b^4$

दिया हुआ व्यंजक $= (4a^2)^2 - (9b^2)^2$

$$= (4a^2 + 9b^2)(4a^2 - 9b^2)$$
$$(4a^2 + 9b^2)\{(2a)^2 - (3b)^2\}$$
$$= (4a^2 + 9b^2)(2a + 3b)(2a - 3b)$$

उदाहरण 7. $(x+y-z)$ को $(x-y+z)$ गुणा करो।

गुणनफल $=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}$

$=x^2-(y-z)^2$

$=x^2-(y^2-2yz+z^2)$

$=x^2-y^2-z^2+2yz.$ उत्तर

उदाहरण 8. $(a^2+2ab+e^2)^2-(a^2-2ab+c^2)$ को सरल करो।

दी हुई राशि $=\{(a^2+2ab+c^2)+(a^2+2ab+c^2)\}$

$\times\{(a^2+2ab+c^2)-(a^2-2ab+c^2)\}$

$=(a^2+2ab+c^2+a^2-2ab+c^2)$

$(a^2+2ab+c^2-a^2-2ab-c^2)$

$=2(a^2+c^2)\times 4ab$

$=8ab(a^2+b^2).$ उत्तर

उदाहरण 9. $(9989)^2-(9988)^2$ का मान बताओ।

दिया हुआ व्यंजक $=(9989+9988)\times(9989-9988)$

$=19977\times 1=19977.$ उत्तर

उदाहरण 10. मूल्य निकालो—

$$\frac{5{\cdot}476\times 5{\cdot}476-4{\cdot}524\times 4{\cdot}524}{5{\cdot}476+4{\cdot}524}$$

दिया हुआ व्यंजक $=\dfrac{(5{\cdot}476)^2-(4{\cdot}524)^2}{5{\cdot}476+4{\cdot}524}$

$$=\frac{(5{\cdot}476+4{\cdot}524)(5{\cdot}476-4{\cdot}524)}{5{\cdot}476+4{\cdot}524}$$

$=5{\cdot}476-4{\cdot}524={\cdot}952.$ उत्तर

EXAMPLE 20

गुणा करो—

1. $3x + 5$ और $3x - 5$
2. $8x - 3y$ और $8x - 3y$
3. $ab + cd$ और $ab - cd$
4. $xy + 3z^2$ और $xy - 3z^2$
5. $a + b + c$ और $a - b + c$
6. $abc - xyz$ और $abc + xyz$
7. $ax + by + cz$ और $ax - by - cz$
8. $x^2 + y^2 + z^2$ और $x^2 - y^2 + z^2$
9. $x^2 + x + 1$ और $x^2 - x + 1$
10. $x + y - z + 1$ और $x - y + z + 1$

वितत गुणनफल निकालो—

11. $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$
12. $(x + 3)(x - 3)(x^2 + 9)$
13. $(2x + 3y)(2x - 3y)(4x^2 + 9y^2)$
14. $(x^4 + 16y^4)(x^2 + 4y^2)(x + 2y)(x - 2y)$ (P.U. 18)
15. $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$ (P.U. 18)
16. $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$ (P.U. 26)
17. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1)(x^4 - 2x^3 + x^2 + 1)$ (P.U. 32)
18. $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)$
(P. U. 27A, 36A, 39S, 46S; S.S. 58A; H.S. 65A)
19. $(1 + x + y)(1 - x + y)(1 + x - y)(x + y - 1)$ (N.D.A.55)

सरल करो—

20. $(2x + 5y)^2 - (5x + 2y)^2$
21. $(7x + 3y)^2 - (5x + y)^2$
22. $(a^2 + ab + b^2)^2 - (a^2 - ab + b^2)^2$
23. $(x + y + z)^2 - (x + y - z)^2$

इनके मान निकालो—

24. $576 \times 576 - 225 \times 225$

25. $\dfrac{5396 \times 5396 - 4127 \times 4127}{5396 + 4127}$

26. $\dfrac{975 \times 975 - 672 \times 672}{975 - 672}$

27. $\dfrac{\cdot01 \times \cdot01 - \cdot001 \times \cdot001}{\cdot011}$

इनके गुणनखंड निकालो—

28. $36a^2 - 81b^2$

29. $121a^2 - 49b^2$

30. $(3a + 4b)^2 - (2a - 5b)^2$

31. $(2x + 3y + 4z)^2 - (x + 2y + 3z)^2$

32. $(a - b)^2 - (x - y)^2$

33. $(3x + 5y)^2 - (2x - 7y)^2$

34. $(a + 2b - 3c)^2 - (a + b - c)^2$

35. $(2m + 3n - 5p)^2 - (2n + 3p)^2$

36. $(3x + 4y + 7z) - (2x - 3y + 5z)^2$

37. $(3a + 2b - 3c)^2 - (a + 2b + 3c)^2$

38. $(2x^2 + 3y^2)^2 - 16x^2y^2$

39. $16\,a^4b^4 - 64$

40. $36x^2 - 25(y - z)^2$

30. सूत्र IV—$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

उप-सूत्र IV $\because \quad (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

$\therefore \quad a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$.

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. $2x+3y$ का घन निकालो।

$$(2x+3y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2\cdot(3y) + 3\cdot(2x)(3y)^2 + (3y)^3$$
$$= 8x^3 + 3\cdot4x^2\cdot3y + 3\cdot2x\cdot9y^2 + 27y^3$$
$$= 8x^2 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$$

उदाहरण 2. $a+b+c$ का घन निकालो।

$$(a+b+c)^3 = \{a+(b+c)\}^3$$
$$= a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a(b^2+2bc+c^2)$$
$$+ b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3abc$$
$$+ 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2$$

उदाहरण 3. यदि $x+y=7$ तथा $xy=16$, तो x^3+y^3 का मान बताओ।

सूत्र से, $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$

$$= 7^3 - 3\times16\times7$$
$$= 343 - 336 = 7$$

उदाहरण 4. यदि $a + \frac{1}{a} = b$ हो, तो

साबित करो कि $a^3 + \frac{1}{a^3} = b^3 - 3b$

सूत्र से, $a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3a \cdot \frac{1}{a}\left(a + \frac{1}{a}\right)$

$= b^3 - 3b$

उदाहरण 5. सरल करो—

$$(2a+3b)^3 + (2a-3b)^3 + 3(2a+3b)^2(2a-3b) + 3(2a+3b)(2a-3b)^2$$

माना कि $2x + 3b = x$ और $2a - 3b = y$

$\therefore$ व्यंजक $= x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$

$= (x+y)^3$

$= (2a + 3b + 2a - 3b)^3$

$= (4a)^3$

$= 64a^3$

उदाहरण 6. अगर $a = -1$ हो, तो

$8a^3 + 36a^2 + 54a + 26$ का मान बताओ।

दिया हुआ व्यंजक $= (2 \cdot a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2a \cdot 3^2 + (3)^3 - 1$

$= (2a+3)^3 - 1$

$= \{2(-1) + 3\}^3 - 1$

$= \{-2 + 3\}^3 - 1$

$= (1)^3 - 1$

$= 1 - 1 = 0$

उदाहरण 7. अगर $x + y = 2$ हो, तो

$x^3 + y^3 + 6xy$ का मान बताओ।

$x^3 + y^3 + 6xy = x^3 + y^3 + 3xy \cdot 2$

$= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) \quad (\because x + y = 2)$

$= (x+y)^3$

$= 2^3$

$= 8$

उदाहरण 8. अगर $a + \frac{1}{a} = m$ हो, तो

$\mathbf{a^3 + \frac{1}{a^3}}$ का मान बताओ।

$\because \quad a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$\therefore \quad a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3a \cdot \frac{1}{a}\left(a + \frac{1}{a}\right)$

$= m^3 - 3m$

उदाहरण 9. यदि $ab(a+b) = 1$ हो, तो

साबित करो कि $\mathbf{\frac{1}{a^3b^3} - a^3 - b^3 = 3}$

सूत्र से, $(a+b)^3 = a^3 + b^3 - 3ab\,(a+b)$

लेकिन $ab(a+b) = 1$

$\therefore \quad a + b = \frac{1}{ab}$

अतः $\left(\frac{1}{ab}\right)^3 = a^3 + b^3 - 3ab(a+b)$

$\frac{1}{a^3b^3} = a^3 + b^3 - 3 \times 1$

या, $\frac{1}{a^3b^3} - a^3 - b^3 = 3$

उदाहरण 10. यदि $x = 4$ और $y = -2$ हो, तो

$\mathbf{8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3}$ का मान बताओ।

दी हुई राशि $= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 + (3y)^3$

$= (2x + 3y)^3$

$= \{2 \times 4 + 3 \times -2\}^3$

$= 2^3$

$= 8$

EXAMPLE 21

निम्नलिखित का घन निकालो—

1. $x+3$ 2. $2x+y$ 3. $4x+3y$ 4. $a+b+c$

5. $x+\frac{1}{x}$ 6. $ax+by+cz$. 7. $a-b-c$ 8. a^2b+c^2d

सरल करो—

9. $(2x+3y)^3+3(2x+3y)^2(2x-3y)+3(2x+3y)\times(2x-3y)^2+(2x-3y)^3$

10. $(4a+5b)^3+3(4a+5b)^2(4a-5b)+3(4a+5b)\times(4a-5b)^2+(4a-5b)^3$

11. $(3m+5n)^3+3(3m+5n)^2(2m-5n)+(3m+5n)\times(2m-5n)^2+(2m-5n)^3$

12. $(3a-7b)^3+(10b-3a)^3+9b(3a-7b)(10b-3a)$

13. $(5x-2)^3+(3-4x)^3+3(x+1)(5x-2)(3-4x)$

14. $(a-b+c)^3+(a+b-c)^3+6a\{a^2-(b-c)^2\}$

प्रत्येक दशा में x^3+y^3 का मान निकालो—

15. $x+y=6$ और $xy=9$ 16. $x+y=7$ और $xy=12$

17. $x+y=4$ और $xy=3$

18. यदि $x+y=7$ हो, तो x^3+y^3+21xy का मान बताओ।

19. यदि $a+b=3$ हो, तो a^3+b^3+9ab का मान बताओ।

20. यदि $x+y=a+b$ हो, तो साबित करो कि $x^3+y^3+3xy(a+b)=(a+b)^3$

21. (i) यदि $a+b+c=0$ हो, तो साबित करो कि $a^3+b^3+c^3=3abc$.

(ii) यदि $x^2-2x-2=0$ हो, तो साबित करो कि $x^6-20x^3=8$

22. यदि $x + \frac{1}{x} = 6$ हो, तो $x^3 + \frac{1}{x^3}$ का मान बताओ।

23. यदि $x + \frac{1}{x} = 3$ हो, साबित करो कि $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$

24. यदि $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$ हो, तो साबित करो कि $x^3 + \frac{1}{x^3} = 0$

(P. U. 24)

25. यदि $ab + \frac{1}{ab} = 5$ हो, तो $a^3b^3 + \frac{1}{a^3b^3}$ का मान निकालो।

26. मान बताओ—

$1{\cdot}52 \times 1{\cdot}52 \times 1{\cdot}52 + 8{\cdot}48 \times 8{\cdot}48 \times 8{\cdot}48 + 30 \times 1{\cdot}52 \times 8{\cdot}48$

(P. U. 41)

27. यदि $a - b = 8$ और $ab = 9$ हो, तो $a^3 + b^3$ का मान निकालो।

28. मान बताओ—

(i) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ जबकि $x = 2$

(ii) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 26$ जबकि $x = -1$

(iii) $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ जबकि $x = -3;\ y = 2$

29. यदि $(2x + 5y)(x - 2y) = 6$ और $x + 3y = \frac{5}{3}$ हो, तो $(2x + y)^3 + (x - 2y)^3$ का मान निकालो।

30. यदि $x + \frac{1}{x} = 4$ हो, तो $2x^3 - 3x + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$ का मान बताओ।

31. यदि $a^4 + \frac{1}{a^4} = 194$ हो, तो $a^3 + \frac{1}{a^3}$ का मान बताओ।

31. सूत्र V—$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

$[\ (a - b)^3 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\ ]$

उप-सूत्र V— $\because \quad (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

$\therefore \quad a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. $3x - 2y$ का घन निकालो।

$$(3x-2y)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 - (2y)^3$$
$$= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3.$$

उदाहरण 2. $a - b - c$ का घन निकालो।

$$(a-b-c)^3 = \{a-(b+c)\}^3$$
$$= a^2 - 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 - (b+c)^3$$
$$= a^3 - 3a^2b - 3a^2c + 3a(b^2 + 2bc + c^2)$$
$$- (b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3)$$
$$= a^3 - 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2$$
$$- b^3 - 3b^2c - 3bc^2 - c^3$$
$$= a^3 - b^3 - c^3 - 3a^2b - 3x^2c + 3ab^2$$
$$+ 3ac^2 - 3b^2c - 3bc^2 + 6abc$$

उदाहरण 3. अगर $x = 2$, तो

$8x^3 - 12x^2 + 6x - 4$ का मान निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $= (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 1 + 3(2x) \cdot 1^2 - 1^3 - 3$

$$= (2x-1)^3 - 3$$
$$= (2 \cdot 2 - 1)^3 - 3$$
$$= 3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$$

उदाहरण 4. सरल करो—

$(3x-8y)^3 - (2x-7y)^3 - 3(x-y)(3x-8y)(2x-7y)$

माना कि $3x - 8y = a$ और $2x - 7y = b$

$\therefore \quad a - b = (3x - 8y) - (2x - 7y)$

$= x - y$

$\therefore$ दी हुई राशि $= a^3 - b^3 - 3(a-b)\cdot ab$

$= (a-b)^3$

$= (x-y)^3$

$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

उदाहरण 5. यदि $x - y = 5$ तथा $xy = 8$ हो, तो $x^3 - y^3$ का मान निकालो।

$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy\,(x-y)$$
$$= 5^3 + 3 \times 8 \times 5$$
$$= 125 + 120 = 245$$

उदाहरण 6. यदि $x - \frac{1}{x} = 3$ तो $x^3 - \frac{1}{x^3}$ का मान निकालो

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$$
$$= 3^3 + 3 \times 3 = 27 + 9 = 36$$

EXAMPLE 22

इनका घन निकालो—

1. $1 - a$
2. $3x - 2y$
3. $3a - 1$
4. $3m - 5n$
5. $4a - 3b$
6. $a^2 + b^2 + c^2$
7. $a - b - c,$
8. $3x - 4y$

इनको सरल करो –

9. $(2x+3y)^3 - 3(2x+3y)^2(2x-3y) + 3(2x+3y) \times (2x-3y) - (2x-3y)^3$

10. $(4a+5b)^3-3(4a+5b)^2(4a-5b)+3(4a+5b)$
$\times(4a-5b)^2-(4a-5b)^3$

11. $(7x-9)^3-(5x-9)^3-6x(7x-9)(5x-9)$

12. $(3x+2y)^3-(2x+3y)^3-3(x-y)(3x+2y)(2x+3y)$

13. $(3x+2y)^3-(3x-2y)^3-12y^2(9x^2-4y^2)$

14. $(4x+y)^3-(4x-y)^3-6y(16x^2-y^2)$

इनका मान बताओ—

15. $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$, जबकि $x=7$, $y=1$

16. $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$, जबकि $x=4$, $y=2$

17. $p^3-6p^2+12p-8$, जबकि $p=-2$

18. $(2x+3y)^3-(x-y)^3-3(2x+3y)(x-y)(x+2y)$ जबकि $x+2y=3$

19. $(3x-2y)^3-(2x-3y)^3-3(3x-2y)(2x-3y)(x+y)$ जबकि $3x-2y=4$ और $2x-3y=1$

20. $x^3-\frac{1}{x^3}$ जबकि $x-\frac{1}{x}=3$

21. यदि $x-\frac{1}{x}=p$ हो, साबित करो कि $x^3-\frac{1}{x^3}=p^3+3p$

22. यदि $x-\frac{1}{x}=3$ हो, तो साबित करो कि

$$x^3-\frac{1}{x^3}-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=3$$

23. यदि $x-\frac{1}{x}=m$ हो, तो साबित करो कि

$$x^3+x^2-x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}=m^3+m^2+2m+2$$

प्रत्येक दशा में $(x^3 - y^3)$ का मान निकालो—

24. जबकि $x - y = 4$ और $xy = 2$
25. जबकि $x - y = 7$ और $xy = 4$
26. जबकि $x - y = 8$ और $xy = 5$
27. जबकि $x - y = 6$ और $xy = 3$
28. जबकि $x - y = 5$ ओर $xy = 1$
29. यदि $x - y = 2$ हो, तो $x^3 - y^3 - 6xy$ का मान बताओ ।
30. यदि $x - y = 6$ हो, तो $x^3 - y^3 - 18xy$ का मान बताओ ।

32. सूत्र VI—$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

$$[(a + a)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$\therefore \quad a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$= (a + b)\{(a + b)^2 - 3ab\}$$

$$= (a + b)\{a^2 + 2ab + a^2 - 3ab\}$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)]$$

नोट—इस सूत्र का व्यवहार $a^3 + b^3$ के गुणनखंड निकालते समय करते हैं ।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. $x^4 - x^2y^2 + y^4$ को $x^2 + y^2$ से गुणा करो ।

माना कि $x^2 = a$ और $y^2 = b$

$$\therefore \quad (x^2 + y^2)(x^4 - x^2 \cdot y^2 + x^4)$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= a^3 + b^3$$

$$= (x^2)^3 + (y^2)^3$$

$$= x^6 + y^6 \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 2. $8a^3+27b^3$ का गुणनखंड निकालो।

$\therefore$ दी हुई राशि $=(2a)^3+(3b)^3$

माना कि $2a=x$ और $3b=y$

$=x^3+y^3$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$ उत्तर

उदाहरण 3. $9a^2-12a+16$ को $3a+4$ से गुणा करो।

माना कि $3a=x$ और $y=4$

$\therefore \quad 9a^2-12a+16=(3a)^2-(3a)\times 4+(4)^2$

$=x^2-xy+y^2$

$\therefore \quad (3a+4)(9a^2-12a+16)=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=x^3+y^3$

$=(3a)^3+(4)^3$

$=27a^3+64$ उत्तर

उदाहरण 4. $x^3y^3+8z^3$ का गुणनखंड निकालो।

दी हुई राशि $=(xy)^3+(2z)^3$

$=(xy+2z)(x^2y^2-2xyz+4z^2)$ उत्तर

EXAMPLE 23

गुणा करो—

1. $x^2-6x+36$ को $x+6$ से
2. $4x^2-2x+1$ को $2x+1$ से
3. a^4-a^2+1 को a^2+1 से
4. $9x^2-15xy+25y^2$ को $3x+5y$ से
5. $m^4-m^2n^2+n^4$ को m^2+n^2 से
6. $9a^2b^2-3abc+c^2$ को $3ab+c$ से

निम्नलिखित का गुणनखंड निकालो—

7. $27a^3+64$
8. $8a^3+125$
9. $64a^3b^3+8c^3$
10. a^6+b^9
11. $8x^3+64b^6$
12. $27a^6b^6+8c^3$
13. $a^3b^9c^6+125^{18}$
14. $27+343a^3b^3c^3$
15. $64x^3+216x^3y^6z^3$
16. $216a^3b^3+c^3$
17. $97x^3y^3+64a^3b^3$
18. $729a^3b^3c^3+1000x^3y^3z^3$
19. $1331a^3b^6x^9+729c^3y^6z^9$
20. $8x^3+216y^3$

33. सूत्र VII $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$$\left[\because \quad (a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)\right.$$
$$\therefore \quad a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$$
$$=(a-b)\{(a-b)^2+3ab\}$$
$$\left.=(a-b)(a^2+ab+b^2)\right]$$

नोट—इस सूत्र का प्रयोग a^3-b^3 का गुणनखंड निकालते समय करते हैं।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. $x^2+2x+4x^2$ को $x-2a$ से गुणा करो।

माना कि $2a=b$,

$$\therefore \quad \text{व्यंजक}=(x-2a)(x^2+2ax+4a^2)$$
$$=(x-b)(x^2+bx+b^2)$$
$$=x^3-b^3$$
$$=x^3-(2x)^3$$
$$=x^3-8x^3 \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 2. $8x^3-27y^3$ का गुणनखंड निकालो।

$$8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3$$
$$=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2) \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 3. $9a^2+12a+16$ **को** $3a-4$ **से गुणा करो।**

$\because$ $9a^2+12a+16=(3a)^2+(3a)4+(4)^2$

माना कि $3a=x$ और $4=y$

$=x^2+xy+y^2$

$\therefore$ व्यंजक $=(3a-4)(9a^2+12a+16)=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=x^3-y^3$

$=27a^3-64$ उत्तर

उदाहरण 4. $x^3y^3-8z^3$ **का गुणनखंड निकालो।**

दी हुई राशि $=(xy)^3-(2z)^3$

$=(xy-2z)(x^2y^2+2xyz+4z^2)$ उत्तर

EXAMPLE 24

गुणा करो—

1. $1+4x+16x^2$ को $1-4x$ से
2. $25x^2+5x+1$ को $5x-1$ से
3. $4m^2+6mn+9n^2$ को $2m-3n$ से
4. $a^2b^2+2abc+4c^2$ को $ab-2c$ से
5. $x^2y^2z^2+3xyz+9$ को $xyz-3$ से
6. a^4+a^2+1 को a^2-1 से

गुणनखंड निकालो—

7. $27-64x^3$
8. $125-x^3y^3z^3$
9. $64x^3-125y^6z^3$
10. $1-27a^3b^6c^3$
11. $27x^3-343a^3b^3c^3$
12. $1000-512x^3y^3z^3$
13. $8-125a^3b^6c^9$
14. $125x^3y^3-216z^3$
15. $125a^3b^3-c^3$
16. $343x^3-8y^3z^3$

17. $216k^3 - 125l^3$
18. $27a^3b^3c^3 - 8x^3y^3z^3$
19. $1 - 512k^3$
20. $729m^3 - 64n^3p^3$

34. सूत्र VIII $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

$$\left[(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b) \right.$$
$$= x^2 + xb + xa + ab$$
$$\left. = x^2 + x(a+b) + ab \right]$$

नोट—उपर्युक्त विधि से यह दिखाया जा सकता है कि—

(i) $(x-a)(x-b) = x^2 - x(a+b) + ab$

(ii) $(x+a)(x-b) = x^2 + x(a-b) - ab$

(iii) $(x-a)(x+b) = x^2 - x(a-b) - ab$

अर्थात् ऐसे दो द्विपद गुणनखंडो के जिनका पहला पद समान हो, गुणनफल के नियम ये हैं—

(i) गुणनफल का पहला पद गुणनखंड के पहले पद तथा गुणक का वर्ग होता है।

(ii) गुणनफल का दूसरा पद गुणनखंड का पहला पद होता है जिसका गुणक गुणनखंडों के दूसरे पदों का योगफल होता है।

(iii) गुणनफल का तीसरा पद गुणनखंडों के दूसरे पदों का गुणनफल होता है।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. $x+3$ को $x+4$ से गुणा करो।

$$(x+3)(x+4) = x^2 + (3+4)x + 3 \times 4$$
$$= x^2 + 7x + 12 \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 2. $x-2$ को $x-5$ से गुणा करो।

$$(x-2)(x-5) = x^2 - (5+2)x + 2 \times 5$$
$$= x^2 - 7x + 10 \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 3. $x-3$ को $x+4$ से गुणा करो।

$$(x-3)(x+4)=x^2-(3-4)x-3\cdot4$$
$$=x^2+x-12.$$ उत्तर

उदाहरण 4. $x+5$ को $x-2$ से गुणा करो।

$$(x+5)(x-2)=x^2+(5-2)x-2\times5$$
$$x^2+3x-10.$$ उत्तर

उदाहरण 5. (a^2+2a+3) और (a^2-4a+3) को गुणा करो।

माना कि $a^2+3=x$

$\therefore$ इष्ट गुणनफल $=(x+2a)(x-4a)$

$$=x^2+2ax-4ax-8a^2$$
$$=x^2-2ax-8a^2$$
$$=(a^2+3)^2-2(a^2+3)a-8a^2$$
$$=a^4+6a^2+9-2a^3-6a-8a^2$$
$$=a^4-2a^3-2a^2-6a+9$$

EXAMPLE 25

निम्नलिखित का गुणनफल निकालो—

1. $(x+3)(x+7)$
2. $(x-7)(x-8)$
3. $(x-9)(x+10)$
4. $(mx+7)(mx-4)$
5. $(x^2+3x+7)(x^2-5x+7)$
6. $(x+7)(x-10)$
7. $(x^2+3x+9)(x^2-4x+9)$
8. $(2x+3y+3)(2x+3y+5$
9. $(x^2-3x+3)(x^2-5x+3)$
10. $(2x^2+4x+5)(2x^2-6x+5)$
11. $(a^2-5a+3)(a^2+6a+3)$
12. $(2x^2+5x-9)(2x^2-6x-9)$
13. $(5x^3-2x^2+7)(5x^3-3x^2+7)$
14. $(2x^3+7x^2+9x)(2x^3-5x^2+9x)$
15. $(4a^2+7a-5)(4a^2-9a-5)$

35. सूत्र IX. $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+x^2(a+b+c)$
$+x(ab+bc+ca)+abc$

$$[\ (x+a)(x+b)(x+c)=(x+a)\ \{x^2+x(b+c)+bc\}$$
$$=x^3+x^2(b+c)+xbc+ax^2$$
$$+ax(b+c)+abc$$
$$=x^3+x^2(a+b+c)$$
$$+x(ab+ac+ca)+abc]$$

नोट—इस तरीके से सूत्र IX में a की जगह $-a$, b की जगह $-b$ और c की जगह $-c$ रखकर यह दिखा सकते हैं कि—

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-x^2(a+b+c)$$
$$+x(ab+bc+ca)-abc$$

उप-सूत्र **IX (i)** $(x-a)(x+b)(x+c)=x^3+x^2(b+c-a)$
$+x(bc-ab-ca)-abc$

(ii) $(x-a)(x-b)(x+c)=x^3+x^2(c-a-b)$
$+x(ab-bc-ca)+abc$

(i) को प्राप्त करने के लिए सूत्र IX में a की जगह $-a$ एवं (ii) को प्राप्त करने के लिए a के लिए $-a$ एवं b के लिए $-b$ रख देते हैं।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. $(x+1)(x+2)(x+3)$ का गुणनफल बताओ।

इष्ट गुणनफल $=x^3+x^2(1+2+3)+x(1\cdot2+1\cdot3+2\cdot3)+1.23$
$=x^3+6x^2+11x+6$

उदाहरण 2. $(x+3)(x-4)(x-5)$ का गुणनफल बताओ।

$x^3+x^2(3-4-5)+x(3x-4+3x-5+4x-5)$
$+3x-4x-5$

इष्ट गुणनफल $=x^3+x^2(3-4-5)+x(-12-15+20)+3\cdot4\cdot5$
$=x^3-6x^2-7x+60$

उदाहरण 3. $(x-3)(x-4)(x-5)$ का गुणनफल निकालो।

इष्ट गुणनफल $= x^3 - x^2(3+4+5) + x(12+15+20) - 3\cdot4\cdot5$

$$= x^3 - 12x^2 + 47x - 60$$

EXAMPLE 26

गुणनफल निकालो—

1. $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)$
2. $(x+1)(x+2)(x+3)$
3. $(x+1)(x-2)(x+3)$
4. $(x-1)(x-2)(x-3)$
5. $(x+3)(x-2)(x-4)$
6. $(x-3)(x-7)(x-8)$
7. $(a-1)(a-\frac{1}{2})(a-\frac{1}{4})$
8. $(a-x)(a-y)(a-z)$
9. $(2a+1)(2a+3)(2a+4)$
10. $(4a-3)(4a-5)(4a-7)$
11. $(ax+m)(ax+n)(ax+p)$
12. $(a+b-1)(a+b-2)(a+b+4)$
13. $(x-y-1)(x-y-2)(x-y+3)$
14. $(x+y-1)(x+y-2)(x+y+3)$
15. $(x+y+z)(x+y+2z)(x+y+3z)$
16. $(2x+y+z)(2x+2y+2z)(2x+3y+3z)$

36. वर्ग पूरा करना (To Complete the Square)—

प्रत्येक द्विघाती व्यंजक (*Binomial expression*) के वर्ग करने में तीन पद मिलते हैं।

जैसे,
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

इनमें पहले को पहला पद, दूसरे को दूसरा पद और तीसरे को तीसरा पद कहते हैं। पहला एवं तीसरा पद हमेशा घनात्मक होता है लेकिन दूसरा घनात्मक या, ऋणात्मक हो सकता है, जैसे ऊपर के उदाहरणों से स्पष्ट है।

अब हम यह बतलाने जा रहे हैं कि जब तीनों पदों में कोई भी दो पद मालूम हो, तो तीसरा पद किस तरह मालूम किया जा सकता है।

(i) अगर पहला एवं तीसरा पद मालूम हो—

दूसरा पद, पहले और तीसरे पदों के वर्गमूल के गुणनफल का दूना होता है। अतः

दूसरा पद $= \pm 2 \times \sqrt{\text{पहला पद}} \times \sqrt{\text{तीसरा पद}}$

जैसे, अगर किसी वर्ग का पहला पद $4a^2$ और तीसरा पद $16b^2$ हो, तो :

दूसरा पद $= \pm 2 \times \sqrt{4a^2} \times \sqrt{16b^2}$

$= \pm 2 \times 2a \times 4b$

$= \pm 16ab$

अतः पूरा व्यंजक $4a^2 + 16ab + 16b^2$ या $4a^2 + 16ab + 16b^2$ होगा।

(ii) अगर पहला और दूसरा पद मालूम हो—

$\because$ दूसरा पद $= \pm 2\sqrt{\text{पहला पद}} \times \sqrt{\text{तीसरा पद}}$

$\therefore$ तीसरा पद $= \left(\dfrac{\text{दूसरा पद}}{2\sqrt{\text{पहला पद}}}\right)^2$

जैसे, अगर किसी वर्ग का पहला पद $4a^2$ और दूसरा पद $16ab$ हो, तो

तीसरा पद $= \left(\dfrac{16ab}{2\sqrt{4a^2}}\right)^2 = \dfrac{16^2a^2b^2}{2^2 2^2 a^2} = \dfrac{256a^2b^2}{16a^2} = 16b^2$

(iii) अगर दूसरा और तीसरा पद मालूम हो—

$\because$ दूसरा पद $= \pm 2 \times \sqrt{\text{पहला पद}} \times \sqrt{\text{तीसरा पद}}$

$\therefore$ पहला पद $= \left(\dfrac{\text{दूसरा पद}}{2\sqrt{\text{तीसरा पद}}}\right)^2$

जैसे अगर किसी वर्ग का दूसरा पद $16ab$ और तीसरा पद $16b^2$ हो, तो

$$\text{पहला पद} = \left(\frac{\text{दूसरा पद}}{2\sqrt{\text{तीसरा पद}}}\right)^2$$

$$= \frac{(16ab)^2}{4 \times 16b^2} = \frac{256a^2b^2}{64b^2} = 4a^2$$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. खाली जगहों को भरो—

$$9x^2 + (\quad) + 16y^2 = (\quad)^2$$

यहाँ दूसरा पद मालूम करना है।

$$\text{दूसरा पद} = 2 \times \sqrt{\text{पहला पद}} \times \sqrt{\text{दूसरा पद}}$$ (∵ दूसरा पद धनात्मक है।)

$$= 2 \times \sqrt{9x^2} \times \sqrt{16y^2}$$

$$= 2 \cdot 3x \cdot 4y$$

$$= 24xy$$

तथा दूसरा पद का चिन्ह + है, अतः

$$4x^2 + 24xy + 16y^2 = (3x + 4y)^2$$

उदाहरण 2. खाली जगहों को भरो—

$$9x^2 - 7xy + (\quad) = (\quad)^2$$

यहाँ तीसरा पद मालूम करना है।

$$\text{तीसरा पद} = \left(\frac{\text{दूसरा पद}}{2\sqrt{\text{पहला पद}}}\right)^2 = \left(\frac{-7xy}{2\sqrt{9x^2}}\right)^2$$

$$= \frac{49x^2y^2}{4 \cdot 9x^2} = \frac{49y^2}{36} = \left(\frac{7y}{6}\right)^2$$

तथा दूसरा पद का चिन्ह − है, अतः

$$9x^2 - 7xy + \frac{49y^2}{36} = \left(3x - \frac{7y}{6}\right)^2$$

उदाहरण 3. खाली जगहों को भरो—

$$(\ )^2 - 8xy + \frac{4}{9}y^2 = (\ )^2$$

यहाँ पहला पद मालूम करना है,

$$\text{पहला पद का चिन्ह} = \left(\frac{\text{दूसरा पद}}{2\sqrt{\text{तीसरा पद}}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{-8xy}{2 \cdot \frac{2}{3}y}\right)^2 = \frac{64x^2y^2}{\frac{16y^2}{9}} = 36x^2$$

तथा दूसरा पद ' − ' है,

अत: $36x^2 - 8xy + \frac{4}{9}y^2 = (6x - \frac{2}{3}y)^2$

EXAMPLE 27

खालो जगहों को भरो—

1. $4a^2 + (\ ) + 25y^2 = (\ )^2$
2. $9x^2 + (\ ) + \frac{4}{9}a^2 = (\ )^2$
3. $9x^2 + (\ ) + 49y^2 = (\ )^2$
4. $16a^2 - (\ ) + 49b^2 = (\ )^2$
5. $\frac{9}{4}a^2 - (\ ) + \frac{4}{9}x^2 = (\ )^2$
6. $\frac{4}{25}x^2 - (\ ) + \frac{25}{36}y^2 = (\ )^2$
7. $(\ )^2 = (4a)^2 - 24ab + (\ )^2$
8. $(\ )^2 = (\ )^2 + 30ab + 25b^2$
9. $4a^2 + 28ab + (\ )^2 = (\ )^2$
10. $9a^2 - 15ab + (\ )^2 = (\ )^2$
11. $x^2 - 4x + (\ )^2 = (\ )^2$
12. $81x^2 - 18x + (\ )^2 = (\ )^2$
13. $(\ )^2 + 7ax + 9x^2 = (\ )^2$
14. $(\ )^2 - 5xy + 4y^2 = (\ )^2$
15. $(\ )^2 - 14ax + 49a^2 = (\ )^2$

16. $\{(\ )^2+3b\}^2=(\ )^2+30ab+(\ )^2$
17. $\{(\ )^2-5x\}^2=49a^2-(\ )+(\ )^2$
18. $\{3x-(\ )\}^2=(\ )^2-(\ )+64$
19. $\{(\ )^2-7y\}^2=(\ )^3-70xy+(\ )^2$
20. $(\ )^2-8xy+\frac{4}{9}x^2=(\ )^2$
21. $49x^2-7ax+(\ )^2=(\ )^2$
22. $64x^2-4ax+(\ )^2=(\ )^2$
23. $(\ )^2+7bp+9b^2=(\ )^2$
24. $9x^2-7xy+(\ )^2=(\ )^2$
25. $4x^2+ap+(\ )^2=(\ )^2$

37. दो पद वाले या तीन पद वाले व्यंजकों को a^2-b^2 के रूप में लाना—

I. दो पद वाले व्यंजकों को a^2-b^2 के रूप में लाना।

यदि दो पद वाले व्यंजकों को a^2-b^2 के रूप में लाना हो तो पहले यह देख लेना चाहिए कि दोनों पद पूर्ण वर्ग हैं या केवल एक ही।

Case (i) जब पहला और तीसरा पद दिया हुआ हो—यदि दोनों पद पूर्ण वर्ग और धनात्मक हों तो उन दोनों को पूर्ण वर्ग मान कर एक ऐसा पद निकालना चाहिए कि उसे दिये हुए व्यंजक में जोड़ने से वह पूर्ण वर्ग हो जाय और जितना पद जोड़ा गया है उसको घटा देना चाहिए ताकि व्यंजक के मान में कोई अन्तर न आवे। जैसे $16x^4+4b^4$ को a^2-b^2 के रूप में लिखना है।

यहाँ $16x^4$ एवं $4b^4$ दोनों पूर्ण वर्ग है। इसलिए एक ऐसी राशि को निकालना चाहिए जिसको $16x^4+4b^4$ में जोड़ने से पूर्ण वर्ग हो जाय।

अर्थात् $16a^4+4b^4=(4a^2)^2+(2b^2)^2$

$$=(4a^2)^2+2\cdot(4a^2)\cdot(2b^2)-16a^2b^2+(2b^2)^2$$
$$=(4a^2+2b^2)^2-16a^2b^2$$
$$=(4a^2+2b^2)^2-(4ab)^2$$

Case (ii) जब पहला और दूसरा पद दिया हुआ हो—यदि दो पद वाला व्यंजक ऐसा हो जिसमें केवल एक पूर्ण वर्ग और धनात्मक हो, तो उस व्यंजक को a^2-b^2 के रूप में लाने के लिए जो पद पूर्ण वर्ग है उसको $(a+b)^2$ या $(a-b)^2$ का पहला पद और दूसरे को इस विस्तार का दूसरा पद मानें।

$\therefore$ तीसरा पद $=\dfrac{(\text{दूसरा पद})^2}{4\times\text{पहला पद}}$ सूत्र से मिल जायगा

जैसे $4x^2-3ax$ को a^2-b^2 के रूप में लिखो।

तीसरा पद $=\dfrac{9a^2x^2}{4\cdot4x^2}=\dfrac{9}{16}a^2$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक

$$=4x^2-3ax+\left(\frac{3a}{4}\right)^2-\left(\frac{3a}{4}\right)^2$$

$$=(2x)^2-2\cdot(2x)\cdot\left(\frac{3a}{4}\right)+\left(\frac{3a}{4}\right)^2-\left(\frac{3a}{4}\right)^2$$

$$=\left(2x-\frac{3a}{4}\right)^2-\left(\frac{3a}{4}\right)^2$$

38. II तीन पद वाले व्यंजकों को a^2-b^2 के रूप में लाना—

तीन पद वाले व्यंजक के पद को जिसको a^2-b^2 के रूप में लाना है, अवरोही क्रम (*Descending order*) में लिखो। जब पहला और तीसरा पद दोनों पूर्ण वर्ग तथा धनात्मक राशियाँ हों, तो पहले बतलाये गये नियम के अनुसार उसके दूसरे पद को मालूम करो जिसे पहला पद और तीसरा पद में जोड़ने से या घटाने से वह पूर्ण वर्ग हो जाय। इस प्रकार दूसरा पद मालूम हो जाने पर दिये हुए व्यंजक के दूसरे पद को दो पदों में इस प्रकार तोड़ दो जिसमें एक पद पूर्ण वर्ग वाला दूसरा पद हो।

उदाहरण 1. $x^4+4y^4-5x^2y^2$ को a^2-b^2 के रूप में लिखो।

अवरोही क्रम में लिखने पर दिया हुआ व्यंजक

$$=x^4-5x^2y^2+4y^4$$

$$=x^4+4x^2y^2-9x^2y^2+4y^4$$

$$= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 9x^2y^2$$
$$= (x^2 + 2y^2)^2 - (3xy)^2$$

अथवा, $x^4 - 4x^2y^2 - x^2y^2 + 4y^4$

$$= (x^2) - 2x^2 \cdot 2y^2 + (2y)^2 - (xy)^2$$
$$= (x^2 - 2y)^2 - (xy)^2$$

उदाहरण 2. $x^2 - 6x + 5$ को $a^2 - b^2$ के रूप में लिखो।

दिया हुआ व्यंजक $= x^2 - 6x + 5$

$$= x^2 - 9 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 5$$
$$= x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 4$$
$$= (x - 3)^2 - (2)^2$$

उदाहरण 3. $x^4 + 5x^2y^2 + 9y^4$ को $a^2 - b^2$ के रूप में लिखो।

दिया हुआ व्यंजक $= x^4 + 5x^2y^2 + 9y^4$

$$= x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot 3y^2 + (3y^2)^2 - x^2y^2$$
$$= (x^2 + 3y^2)^2 - (xy)^2$$

उदाहरण 4. $6x^2 - 7x + 2$ को $a^2 - b^2$ के रूप में लिखो।

दिया हुआ व्यंजक $= 6x^2 - 7x + 2$

$$= 6(x^2 - \tfrac{7}{6}x + \tfrac{1}{3})$$
$$= 6\Big[x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{7}{12} + \left(\frac{7}{12}\right)^2 - \left(\frac{7}{12}\right)^2 + \frac{1}{3}\Big]$$
$$= 6\Big[\left(x - \frac{7}{12}\right)^2 - \frac{49}{144} + \frac{1}{3}\Big)$$
$$= 6\Big[\left(x - \frac{7}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}\Big]$$
$$= 6\Big[\left(x - \frac{7}{12}\right)^2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2\Big]$$

उदाहरण 5. $x^2 - x - 6$ को $a^2 - b^2$ के रूप में लिखो।

दिया हुआ व्यंजक $= x^2 - x - 6$

$$= x^2 - 2 \cdot x \cdot \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2 - 6$$

$$= (x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} - 6$$

$$= (x - \tfrac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}$$

$$= (x - \tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{5}{2})^2$$

EXAMPLE 28

नीचे लिखे व्यंजकों को $a^2 - b^2$ के रूप में लिखो—

1. $4x^4 - 1$ 2. $4x^4 + 1$ 3. $x^4 - 64$
4. $4a^2 - 25b^2$ 5. $x^4 + 64$ 6. $64x^4 - 1$
7. $64x^4 + 1$ 8. $a^2 + b^2$
9. $x^4 - 15x^2y^2 + 9y^4$ 10. $x^2 - x - 6$
11. $x^4 + a^2x^2 + a^4$ 12. $x^4 - 23a^2x^2 + a^4$
13. $4a^4 - 5a^2b^2 + b^4$ 14. $4a^4 - 13a^2b^2 + b^4$
15. $x^8 - 27a^4x^4 + a^8$ 16. $9x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4$
17. $x^2 - x - 2$ 18. $x^2 - 2x - 3$
19. $x^2 + x - 12$ 20. $x^2 + 5x + 4$
21. $x^2 + 7x + 10$ 22. $x^2 + x - 6$
23. $9x^2 - 12x - 12$ 24. $9x^2 + 24x - 9$
25. $9x^4 + 9x^2 - 4$ 26. $9x^4 - 13x^2 + 4$
27. $9x^4 - 15x^2 + 4$ 28. $9x^4 - 25x^2 + 16$
29. $9x^4 - 16x^2y^2 + 4y^4$
30. $x^8 + 5x^4y^2 + 9y^4$

नौ

सरल गुणनखंड

(Easy Factors)

39. परिभाषा—

अगर कोई व्यंजक दो या दो से ज्यादा व्यंजकों का गुणनफल हो, तो पिछले हर एक व्यंजक को पहले का गुणनखंड कहते हैं। जैसे $15 = 3 \times 5$; अतः 3 और 5, 15 का गुणनखंड हुआ।

अगर हम $x + y$ को a से गुणा करते हैं; तो x और y दोनों को a से गुणा करना होगा और गुणनफल $ax + ay$ होगा। गुणनफल के दोनों पदों में a एक गुणनखंड अवश्य होगा। अतः $ax + ay$ का गुणनखंड निकालने में हमको यह पहले देख लेना चाहिए कि इसके दोनों पदों में कोई सामान्य (*Common factor*) है या नहीं। इस उदाहरण में हम देखते हैं कि $ax + ay$ के दोनों ही पद ऐसे हैं, जिनका एक-एक गुणनखंड a है। यानि a, $ax + ay$ का एक गुणनखंड है। अब दूसरा गुणनखंड मालूम करने के लिए $ax + ay$ को a से भाग देना पड़ेगा।

भाग देने से $x + y$ जवाब मिलेगा। इसलिए $ax + ay$ के a और $x + y$ दो गुणनखंड हुए और $ax + ay = a(x + y)$.

उदाहरण 1. $a^2 - ab$ का गुणनखंड निकालो।

यहाँ a दोनों पदों का गुणक है। अतः a दी हुई राशि का एक गुणनखंड है। अब a से $a^2 - ab$ में भाग देंगे। भागफल $a - b$ होगा। अतः $a^2 - ab$ का दूसरा गुणनखंड $a - b$ है।

$\therefore \quad a^2 - ab = a(a - b)$

उदाहरण 2. $10a^2 - 15ab + 5ac$ का गुणनखंड निकालो।

यहाँ $5a$ तीनों पदों का सामान्य गुणक है।

$\therefore \quad 10a^2 - 15ab + 5ac = 5a(2a - 3b + c)$

40. गुणनखंड निकालने का नियम—

(i) जब किसी व्यंजक के हरएक पद में सामान्य खंड हों, तो उस व्यंजक के गुणनखंड निकालने का यह नियम है कि उसके हरएक पद को उस सामान्य खंड से भाग देते हैं और भजनफल को एक कोष्ठक के भीतर रखकर उस कोष्ठक के पहले सामान्य गुणन को रख देते हैं।

उदाहरण 1. $a^2 + ab$ का गुणनखंड निकालो।

यहाँ दोनों पदों में 'a^2' सामान्य गुणक है,

$\therefore \quad a^2 + ab = a(a + b)$

उदाहरण 2. $3a^2 + a^5$ का गुणनखंड निकालो।

यहाँ दोनों पदों में 'a^2' सामान्य गुणक है;

$\therefore \quad 3a^2 + a^5 = a^2(3 + a^3)$

EXAMPLE 29

गुणनखंड निकालो—

1. $a^3 + a^2b$
2. $x^2 + xy$
3. $3a^3 + a^6$
4. $7x - 7x^3 + 14x^4$
5. $xy + yz + xW + zW$
6. $a^2 + ab + ac + bc$
7. $a^3 + 3a^4b$
8. $4ab - 8bc$.
9. $35a^3b^6 - 63a^{10}b^3$
10. $a^2 + ab + ac$
11. $a^3 - a^2b - a^2c$
12. $a^2 - ac - ab + bc$
13. $xb - ac - xc + ab$ (65 S.)
14. $x^2 + 3x + xy + 3y$
15. $(2x + xy) + (2y + y^2)$
16. $x^2 - ax + 5x - 5a$

17. $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$

18. $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$ (P.U. 26 S.)

19. $a^3+a^2b-a^2-ab$

20. $a^2-3a-ab+3b$

21. a^3-a^2+a-1

22. $ax+bx+cx+a+b+c$

23. $(a+b)^2+2a+2b$

24. $x^2+2xy+y^2-x-y$ (64 S.)

25. $x^3+2+\frac{1}{x^3}$

26. x^3+x^2+x+1

27. $x^5+x4+x^3+x^2$

28. $(x+1)^2(x+2)+(x^2+2x)(x+1)$

29. $(bx+ay)^2+(ax-by)^2$

30. $a+(1+a)b+(1+a)(1+b)c+1$

31. $x^4+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}$

32. $\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)+\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2$

(ii) a^2-b^2 के रूप में दिये गये व्यंजक का गुणनखंड निकालना—

दो राशियों के वर्गों का अन्तर उन राशियों के योगफल और उनके अन्तर के गुणनफल के बराबर होता है। अतः एक गुणनखंड उन राशियों का जोड़ और दूसरा गुणनखंड उन राशियों का अन्तर होता है।

उदाहरण 1. x^4+y^4 का गुणनखंड निकालो—

यहाँ $x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

फिर $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$\therefore\ x^4-y^4=(x^2+y^2)(x+y)(x+y)$

उदाहरण 2. $9x^2 - 25y^2$ का गुणनखण्ड निकालो।

यहाँ $9x^2 - 25y^2 = (3x)^2 - (5y)^2$

$= (3x + 5y)(3x - 5y)$

उदाहरण 3. $5x^3 - 20a^2x$ का गुणनखण्ड निकालो।

यहाँ $5x^3 - 20a^2x = 5x(x^2 - 4a^2)$

$= 5x(x + 2a)(x - 2a)$

EXAMPLE 30

गुणनखंड निकालो—

1. $9a^2 - 16b^2$
2. $4a^3 - 25ax^2$
3. $16x^4 - 1$
4. $36x^4 - 1$
5. $a^2b^2 - 16$
6. $a^3 - 9ab^2$
7. $25x^2 - 16y^2$
8. $x^4 - 1$
9. $a^4 - 81b^4$ (65S)
10. $a^2x^2 - b^2y^2$
11. $1 - 16x^4$
12. $x^2 - 81x^6$
13. $36 - x^4a^2$
14. $64a^4 - 49x^6$
15. $a^2b^2 - 25c^2d^2$
16. $81x^{12} - 64x^{10}$
17. $p^2q^4 - 100p^2$
18. $64x^7 - 25x^3a^2$
19. $192a^9 - 243a^5x^4$
20. $a^2 - (3b - 5c)^2$
21. $(x + y)^2 - (x - y)^2$
22. $(3a + 2x)^2 - (2a + x)^2$
23. $4(a - b)^2 - 9(c - d)^2$
24. $49x^2 - (5y - 3z)^2$
25. $(8x + 5)^2 - (2x - 7)^2$
26. $(a + b - c)^2 - (a - b + c)^2$
27. $(2a - 3b + 4c)^2 - (a + 4b - 5c)^2$
28. $64(a + 3x - 4y)^2 - 9(2a - x + 3y)^2$
29. $(4x^2 - 5a^2)^2 - (5x^2 - 4a^2)^2$
30. $(5a^2 - 3a + 7)^2 - (5a^2 - 3a - 7)^2$

(iii) ऐसे व्यंजकों के गुणनखंड निकालना जिनको देखते ही $a^2 - b^2$ के रूप में प्रकट कर सकते हैं। दृष्टान्त के लिए नीचे कुछ साधित उदाहरण दिये जा रहे हैं।

उदाहरण 1. $\mathbf{a^4 + a^2b^2 + b^4}$ **का गुणनखंड निकालो।**

(P.U. 49S, S.S. 64S, 65S)

दी हुई राशि $= a^4 + a^2b^2 + b^4$

$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$

$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$

$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$

उदाहरण 2. $\mathbf{a^8 + a^4x^4 + x^8}$ **का गुणनखंड निकालो।**

दी हुई राशि $= a^8 + a^4x^4 + x^8$

$= a^8 + 2a^4x^4 + x^8 - a^4x^4$

$= (a^4 + x^4)^2 - (a^2x^2)^2$

$= (a^4 + x^4 + a^2x^2)(a^4 + x^4 - a^2x^2)$

$= (a^2 + x^2 + ax)(a^2 + x^2 - ax)(a^4 + x^4 - a^2x^2)$

उदाहरण 3. $\mathbf{4x^4 + 81}$ **का गुणनखंड निकालो।**

(55S; S.S. 62A, 65A)

यहाँ $4x^4 + 81 = (2x^2)^2 + 9^2$

$= 2x^2 + 2 \cdot 2x^2 9 + 9^2 - 36x^2$

$= (2x^2 + 9)^2 - (6x)^2$

$= (2x^2 + 9 + 6x)(2x^2 + 9 - 6x)$

$= (2x^2 + 6x + 9)(2x^2 - 6x + 9)$

उदाहरण 4. $\mathbf{x^2 + 3x - y^2 - 3y}$ **का गुणनखंड निकालो।**

(P.U. 46S, S.S. 54A, 60S)

दी हुई राशि $= x^2 - y^2 + 3(x - y)$

$= (x + y)(x - y) + 3(x - y)$

$= (x - y)(x + y + 3)$. उत्तर

उदाहरण 5. गुणनखंड निकालो—

(i) $4(ab+cd)^2 - a^2 + b^2 - c^2 - d^2,^2$ P.U. 22)

(ii) $(ad+bc)^2 - (ac+bd)^2$ (P.U. 50S)

(iii) $x^2 + 2xy - a^2 - 2ay$ (P.U. 39S, S.S. 64A)

(i) दी हुई राशि $= \{2(ab+cd)\}^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

$= \{2(ab+cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2\}$

$\times \{2(ab+cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2\}$

$= \{a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 - 2cd + d^2\}$

$\times \{(c^2 + 2cd + d^2) - (a^2 - 2ab + b^2)\}$

$= \{(a+b)^2 - (c-d)^2\}\{(c+d)^2 - (a-b)^2\}$

$= (a+b+c-d)(a+b-c+d)$

$(c+d+a-b)(c+d-a+b)$ उत्तर

(ii) दी हुई राशि $= (ad+bc+ac+bd)(ad+bc-ac-bd)$

$= \{d(a+b) + c(a+b\}\{d(a-b) - c(a-b)\}$

$= (a+b)(d+c)(a-b)(d-c)$ उत्तर

(iii) दी हुई राशि $= x^2 + 2xy + y^2 - y^2 - 2ay - a^2$

$= (x+y)^2 - (y+a)^2$

$= (x+y+y+a)(x+y-y-a)$

$= (x+2y+a)(x-a)$ उत्तर

EXAMPLE 31

गुणनखंड निकालो—

1. $x^4 + 4$ (P.U. 20, 45)
2. $x^4 - 6x^2 + 1$
3. $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$
4. $49m^4 + 16n^4 - 60m^2n^2$
5. $4x^4 + a^4$
6. $x^4 + x^2 + 1$
7. $x^8 + x^4 + 1$
8. $a^4 + a^2x^2 + x^4$
9. $a^8 + a^4x^4 + x^8$
10. $9x^4 + 36$
11. $a^4 + 2a^2 + 9$
12. $x^4 - 7x^2 + 9$

13. $4x^4 + 8x^2 + 9$
14. $4x^4 - 16x^2 + 9$
15. $9x^4 + 23x^2 + 16$
16. $9a^4 - 25a^2 + 16$
17. $9x^4 - 33x^2 + 16$
18. $9a^4 - a^2 + 16$
19. $16x^4 + 4x^2a^4 + 25a^4$
20. $9a^4 - 19a^2x^2 + 25x^4$
21. $x^4 + 8x^2 + 144$
22. $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$
23. $4a^2 - b^2 - 9c^2 + 6bc$
24. $9x^2 - 4y^2 + 12y^2 - 9z^2$
25. $a^2 - 4b^2 - 25c^2 - 20bc$
26. $a^2 + 4b^2 - 9c^2 + 4d^2 - 4ab + 12cd$
27. $(x^2 - 2xy) - (-z^2 - 2yz)$
28. $4x^2 - 1 + 9a^2 - 25b^2 + 12xa - 10b$
29. $9x^2 - 4xy - 49z^2 - 30x + 28yz + 25$
30. $16a^2 - 16c^2 - 9b^2 - 24a + 24bc + 9$
31. $a^3 + 2a^2 - a - 2$ (P.U. 47S)
32. $1 - 2x - 2x^3 - x^2$
33. $a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$ (P.U. 25, S.S. 62S)
34. $x^2 + xy - yz - z^2$ (65A)
35. $a^2 - b^2 + 6bc - 9c^2$ (P.U. 40A, S.S. 62A)
36. $x^4 + 64$ (P.U. 41 A)
37. $x^4 - 23x^2 + 1$ (P.U. 19, H.S. 65 A)

गुणनखंड निकालो—

38. $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$ (S.S. 56S, 61S, 63A)
39. $4x^4 + 3x^2 + 9$ (P.U. 47S, S.S. 59A, H.S. 64S)
40. $x^4 - 32x^2 + 4$ (P.U. 34)
41. $81x^8 - 7x^4y^4 + y^8$ (S.S. 64A)
42. $4x^4 - 12x^2y^2 + y^4$
43. $4x^4 - 3x^2y^2 + 9y^4$
44. $4x^4 + 8x^2y^2 + 9y^4$
45. $9x^4 - 34x^2y^2 + 25y^4$

46. $a^8 + a^4b^4 + b^8$ 47. $a^8 + 81a^4 + 6561$

48. $81a^4 + 47 + \frac{16}{a^4}$ 49. $49y^2 + 20z + x^2 - 14xy - 25z^2 - 4$

50 $16x^2 + 42by - 9y^2 + 40xa - 49b^2 + 25a^2$

51. $49x^2 - 1 + 16y^2 - 64z^2 + 16z - 56xy$

52. $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2(ad - bc)$

53. $x^2 + 3x - y^2 - 3y$ (S.S. 67A)

(iv) $a^3 + b^3$ अथवा $a^3 - b^3$ के रूप में प्रकट किये हुए व्यंजकों का गुणनखंड निकालना—

हम जानते हैं कि, $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\ (a+b)$

$$\therefore \quad a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab\ (a+b)$$
$$= (a+b)\{(a+b)^2 - 3ab\}$$
$$= (a+b)\{a^2 + 2ab + b^2 - 3ab\}$$
$$= (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

फिर, $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

$$\therefore \quad a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$
$$= (a-b)\{(a-b)^2 + 3ab\}$$
$$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$
$$= (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. गुणनखंड निकालो—

(i) $a^4 - 8ab^3$ (S.S. 60A)

(ii) $343x^3 + 8$ (P.U. 21)

(iii) $x^3 + 64$

(i) यहाँ, $a^4 - 8ab^3 = a(a^3 - 8b^3)$

$$= a(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$$

(ii) यहाँ, $343x^3 + 8 = (7x)^3 + 2^3$
$= (7x + 2)(49x^2 + 17x + 4)$

(iii) यहाँ, $x^3 + 64 = (x)^3 + (4)^3$
$= (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

उदाहरण 2. गुणनखंड निकालो $m^6 - n^6$ (S.S. 68A)

दी गयी राशि $= (m^2)^3 - (n^2)^3$
$= (m^2 - n^2)(m^4 + m^2n^2 + n^4)$
$= (m + n)(m - n)(m^4 + m^2n^2 + n^4)$

$(m^3)^2 - (n^3)^2 = (m^3 + n^3)(m^3 - n^3)$
$= (m + n)(m^2 - m\cdot n + n^2)(m - n)(m^2 + m\cdot n + n^2)$
$= (m + n)(m - n)(m^2 - m\cdot n + n^2)$
$(m^2 + m\cdot n + n^2)$ उत्तर ।

EXAMPLE 32

गुणनखंड निकालो—

1. $x^3 - 8$ 2. $x^9 + y^9$ 3. $x^9 - y^9$
4. $64x^7 - xa^3$ 5. $a^3 - b^3$ 6. $a^4 - 27ax^3$
7. $512x^9 + 1$ 8. $a^9 - 512b^9$ 9. $8a^3b^3 + c^3$
10. $8a^3 + 27b^3$ 11. $27x^3 + 64y^3$ 12. $x^3 + \frac{1}{x^3}$
13. $1000 + x^3$ 14. $x^6 - 64$ (H. S. 65S)
15. $x^6 - 64b^6$ 16. $x^6 - 1$ (P.U. 46S)
17. $x^{12} - y^{12}$ 18. $(a + b)^3 + 8$
19. $x^4 - x$ 20. $2 - 16x^3$
21. $8x^3 + y^3 - 2x - y$ 22. $x^4 + x^3y + xz^3 + yz^3$
23. $x^4 - x^3y - xz^3 + yz^3$ 24. $8(x - y)^3 - y^3$
25. $x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3$ 26. $8(a - b)^3 - b^3$
27. $(x + y)^3 - 8z^3$ 28. $(a + b)^3x^3 - 8c^3z^3$
29. $2x^3 - 64(y - z)^3$

मान निकालो—

30. (i) $\frac{\cdot89\times\cdot89\times\cdot89-\cdot64\times\cdot64\times\cdot64}{\cdot89\times\cdot89+\cdot89\times\cdot64+\cdot64\times\cdot64}$

(ii) $\frac{\cdot73\times\cdot73\times\cdot73+\cdot63\times\cdot63\times\cdot63}{\cdot73+\cdot63}$

V- x^2+px+q के रूप के व्यंजकों का गुणनखण्ड निकालना—

पहला नियम—x^2+px+q को $x^2+(a+b)x+ab$ के बराबर लिख सकते हैं जबकि $p=a+b$ और $q=ab$

अब $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

यानि, $x^2+(a+b)x+ab$ के $x+a$ और $x+b$ गुणनखंड हैं। इन खंडों को और इनके गुणनफल को गौर से देखने से मालूम होता है कि—

(i) गुणनफल के दूसरे पद का गुणक, जिसमें 'x' है, गुणनखंडों के दूसरे पदों (a और b) का जोड़ है।

(ii) गुणनफल का तीसरा पद गुणनखंडों के दूसरे पदों (a और b) का गुणनफल है।

गुणनफल के नीचे बतलाये हुए तरीके से लिख सकते हैं—

x^2+(गुणनखंडों के दूसरे पदों का जोड़)$x+$ गुणनखंडों के दूसरे पदों का गुणनफल।

इसी तरह, (i) $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$

$=x^2+\{(-a)+(-b)\}x+(-a)(-b$

(ii) $(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$

$=x^2+\{a+(-b)\}x+(a)(-b)$

अतः नियम—

दिये हुए व्यंजक के तीसरे पद को दो खंड इस तरह करो कि अगर वह पद धनात्मक हो, तो इन खंडों का जोड़ दूसरे पद के x के गुणक के बराबर

हो और अगर यह पद ऋणात्मक हो, तो इन खंडों का अन्तर इसके गुणक के बराबर हो। इसके वाद नीचे लिखे उदाहरणों के अनुसार व्यंजक का गुणनखंड निकालो।

उदाहरण 1. $x^3 + 8x - 48$ का गुणनखंड निकालो—(P.U. 21)

यहाँ अचल पद -48 है जो ऋणात्मक है। अतः 48 को ऐसे दो खण्डों में विभक्त करना चाहिए ताकि उनका अन्तर x के गुणक 8 के बराबर हो। 48 का ऐसा खंड 12 और 4 ही होगा।

$$\therefore \quad x^2 + 8x - 48 = x^2 + 12x - 4x - 48$$
$$= x(x + 12) - 4(x + 12)$$
$$= (x + 12)(x - 4)$$

उदाहरण 2. $x + 12 - x^2$ का गुणनखंड निकालो। (P.U. 22)

$$x + 12 - x^2 = -x^2 + x + 12$$
$$= -x^2 + 4x - 3x + 12$$
$$= -x(x - 4) - 3(x - 4)$$
$$= (x - 4)(-x - 3) = -(x - 4)(x + 3)$$

उदाहरण 3. $x^2 + 2x - 323$ का गुणनखंड निकालो।

(H. S. 64A, 65S.)

$$x^2 + 2x - 323 = x^2 + 19x - 17x - 323$$
$$= x(x + 19) - 17(x + 19)$$
$$= (x + 19)(x - 17)$$

उदाहरण 4. $x^4 + 4x^2 - 5$ का गुणनखंड निकालो। (H.S. 60A)

दी हुई राशि $= x^4 + 4x^2 - 5$

$$= x^4 - x^2 - 5x^2 - 5$$
$$= x^2(x^2 - 1) + 5(x^2 - 1)$$
$$= (x^2 - 1)(x^2 + 5)$$
$$= (x + 1)(x - 1)(x^2 + 5). \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 5. $x^4 + 11x^2 - 180$ का गुणनखंड निकालो।

$$\begin{aligned}
\text{दी हुई राशि} &= x^4 + 11x^2 - 180 \\
&= x^4 - 9x^2 + 20x^2 - 180 \\
&= x^2(x^2 - 9) + 20(x^2 - 9) \\
&= (x^2 - 9)(x^2 + 20) \\
&= (x + 3)(x - 3)(x^2 + 20). \quad \text{उत्तर}
\end{aligned}$$

उदाहरण 6. $x^6 + 5x^3 + 4$ का गुणनखण्ड निकालो।

(H.S. 64S)

$$\begin{aligned}
\text{दी हुई राशि} &= x^6 + 5x^3 + 4 \\
&= x^6 + x^3 + 4x^3 + 4 \\
&= x^3(x^3 + 1) + 4(x^3 + 1) \\
&= (x^3 + 1)(x^3 + 4) \\
&= (x + 1)(x^3 + 4)(x^2 - x + 1). \quad \text{उत्तर}
\end{aligned}$$

उदाहरण 7. $(x^2 - 4x)^2 - 4(x^2 - 4x) - 5$ का गुणनखंड निकालो। **(P.U.41S, 54A, 60A, S.S.67A.)**

मान लो कि $x^2 - 4x = a$

$$\begin{aligned}
\text{दी हुई राशि} &= a^2 - 4a - 5 \\
&= a^2 + a - 5a - 5 \\
&= a(a + 1) - 5(a + 1) \\
&= (a + 1)(a + 5) \\
&= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 4x - 5) \quad [a \text{ का मान रखने पर}] \\
&= (x^2 - 4x + 1)\{x^2 + x - 5x - 5\} \\
&= (x^2 + 4x + 1)\{x(x + 1) - 5(x + 1)\} \\
&= (x + 1)(x - 5)(x^2 - 4x + 1). \quad \text{उत्तर}
\end{aligned}$$

उदाहरण 8. $a^2+a-110$ का खुणनखंड निकालो।

(H.S. 68A)

दी हुई राशि $= a^2+a-110$

$= a^2-10a+11a-110$

$= a(a-10)+11(a-10)$

$= (a+10)(a+11)$. उत्तर

उदाहरण 9. $3x^2-14x-5$ का गुणनखंड निकालो।

(S.S. 60S)

दी हुई राशि $= 3x^2-15x+x-5$

$= 3x(x-5)+1(x-5)$

$= (x-5)(3x+1)$. उत्तर

उदाहरण 10. गुणनखंड निकालो।

(i) $a^2-b^2-2ab-c^2$ (S.S. 59S)

(ii) $a^2+b^2-c^2+2ab+(a+b+c)$ (S.S. 60S)

(iii) $(a^2+1)y^2-y^4-a^2$ (S.S. 61S)

(i) दी गयी राशि $= a^2-(b^2+2bc+c^2)$

$= a^2-(b+c)^2$

$= (a+b+c)(a-b-c)$ उत्तर

(ii) दी गयी राशि $= \{(a+b)^2-(c^2+(a+b+c)$

$= (a+b+c)\ (a+b-c)+(a+b+c)$

$= (a+b+c)(a+b-c+1)$ उत्तर

(iii) दी गयी राशि $= (a^2+1)y^2-y^4-a^2$

$= a^2y^2+y^2-y^4-a^2$

$= a^2(y^2-1)-y^2(y^2-1)$

$= (a^2-y^2)(y^2-1)$

$= (a+y)(a-y)(y+1)(y-1)$. उत्तर

EXAMPLE 33

गुणनखंड निकालो—

1. $x^2+7x+12$ 2. $x^2-13x+42$ 3. x^2-x-72
4. $x^2+4x-192$ 5. $x^2-7xy-8y^2$
6. x^4-11x^2+28 7. $x^2-6x-40$
8. $x^2-14x+40$ 9. $x^2-8x-20$
10. x^2+3x+2 11. x^2+5x+6
12. $x^2+7x+12$ 13. $x^2+9x+20$
14. x^2+4x+3 15. x^2+5x+4
16. $x^2-14x+45$ 17. $x^2-27x+170$
18. $x^2-17x+70$ 19. x^2-x-90
20. $x^2-x-110$ 21. $x^2-x-156$
22. $x^2+16x-80$ 23. $x^2+10x-75$
24. $x^2+8x-65$
25. $x^2-2(a+5)x+a^2+10a$
26. $x^2-2x(y+2)+(y+1)(y+3)$
27. $(x^2+5x)^2+7(x^2+5x)+6$
28. $(a^2-2a)^2-2(a^2-2a)-3$
29. $(x^2-3x)^2-3(x^2-3x)-4$
30. $(x^2+8x)^2-18(x^2+8x)-495$
31. $(x^2-6x)^2-67(x^2-6x)+1080$
32. x^4-2x^2-63 33. $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3$
34. $(x^2-6x)^2-8(x^2-6x+8)-64$ (P. U. 44 A, S.S. 61S)
35. $(x^2+3x-6)(x^2+3x-2)-32$ (P. U. 30, H. S. 65A)
36. $(a^2+a-6)(a^2+a-20)-15$ (S.S. 61A)
37. $(5x+7y)^2-2(5x+7y)(x-y)-8(x-y)^2$
38. $(a+4b)^2+14(a+4b)(a-b)+45(a-b)^2$

39. $(x^2-6x-36)^2+19x(x^2-6x-36)-66x^2$

40. $x^2+(3a+4b)\ x+2a^2+8ab$

41. $x^2+(3a+4)x+6ab+4b^2$

42. $(x^2+y^2)^2-7(x^4-y^4)-30\ (x^2-y^2)^2$

43. $(x^2+3x)^2-3(x^2+3x)+2$

44. $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)-24$

45. $(x^2+5x)^2-8(x^2+5x)-84$

46. $(x^2-7x)^2-8(x^2-7x)-180$

47. $(x+2y)^2-(x+2y)-6$

48. $(x+y+z)^2-3(x+y+z)+2$

49. $(x^2+3x)^2-3(x^2+3x)^2-4$

50. $(x^2-8x)^2-18(x^2-8x)-495$

दूसरा नियम—

x^2+px+q के रूपवाले त्रिपद व्यंजकों को दो वर्गों (a^2-b^2) के रूप में लिखकर पीछे दिये गये नियमों से गुणनखंड निकालो।

उदाहरण 1. $x^2+7x+10$ का गुणनखंड निकालो।

यहाँ $x^2+7x+10=x^2+2\cdot x\cdot\frac{7}{2}+(\frac{7}{2})^2-(\frac{7}{2})^2+10$

$$=(x+\tfrac{7}{2})^2-\tfrac{49}{4}+10$$

$$=(x+\tfrac{7}{2})^2-(\tfrac{3}{2})^2$$

$$=(x+\tfrac{7}{2}+\tfrac{3}{2})(x+\tfrac{7}{2}-\tfrac{3}{2})$$

$$=(x+5)(x+2)$$

नोट—एक पूरा वर्ग बना देने के लिए x^2+7x में 7 (यानि x के गुणक) के आधे का वर्ग जोड़ दिया जाता है। चूंकि x^2+2ax में a^2 यानि x के गुणक के आधे का वर्ग जोड़ देने से $x^2+2ax^2+a^2$ पूरा वर्ग हो जाता है।

VI. px^2+2x+r रूप वाले द्विपद व्यंजकों के गुणनखंड निकालना—

पहला नियम—

$$(ax+b)\ (cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$
$$(ax-b)\ (cx+d)=cax^2+(ad-bc)x-bd$$
$$(ax+b)\ (cx-d)=cax^2+(bc-ad)\ x-bd$$
$$(ax-b)\ (cx-d)=cax^2-(ad+bc)x+bd$$

ऊपर के गुणा के नतीजों को देखने से मालूम होता है कि हरएक गुणनफल तीन पदों का व्यंजक है, जिसमें x के गुणक में वे ही गुणक हैं जो x^2 एवं तीसरे पद के गुणक में हैं।

जैसे, x^2 का गुणक × तीसरा पद $=abcd$

$=ad\times bc$ [चिन्ह छोड़कर]

और x का गुणक $=ad+bc$ या $ad-bc$

अतः नियम—

x^2 के गुणक को तीसरे पद (जिसमें x नहीं है) से गुणा कर देते हैं और गुणनफल के दो गुणनखंड इसी तरह निकाल लेते हैं—कि अगर दूसरा पद धनात्मक हो, तो इन खंडों का जोड़ x के गुणक के बराबर हो और अगर दूसरा पद ऋणात्मक हो, तो इन खंडों का अन्तर x के गुणक के बराबर हो। इसके बाद नीचे कुछ उदाहरण दिये जाते हैं।

उदाहरण 1. $3x^2-14x-5$ का गुणनखंड निकालो। (6CS)

यहाँ x^2 का गुणक 3 है और अचल पद -5 है। इन दोनों को गुणा करने पर -15 आता है। अब 15 को ऐसे दो खंडों में बाँटना है जिसका अन्तर -14 के बराबर है। $\because\ 15=15\times 1$

$$\therefore\ 3x^2-14x-5=3x^2-15x+x-5$$
$$=3x(x-5)+1(x-5)$$
$$=(x-5)(3x+1)$$

उदाहरण 2. $(a+5b)x^2 - bxy - (a+6b)y^2$ का गुणनखंड निकालो। (H.S. 62S)

xy का गुणक b (चिन्ह छोड़कर) $= (a+6b) - (a+5b)$

$\therefore$ दी हुई राशि $= \{a+5b)x^2 - xy\{(a+6b) - (a+5b\} - (a+6b)y^2$

$= (a+5b)x^2 + (a+5b)xy - (a+6b)xy - (a+6b)y^2$

$= (a+5b)x(x+y) - (a+6b)y(x+y)$

$= (x+y)\{(a+5b)x - (a+6b)y\}$

उदाहरण 3. $(2x^2-3x)^2 - 8(2x^2-3x) - 9$ का गुणनखंड निकालो। (P.U. 26S, S.S. 56S)

मान लो $2x^2 - 3x = a$

$\therefore$ दी हुई राशि $= a^2 - 8a - 9$

$= a^2 - 9a + a - 9$

$= a(a-9) + 1(a-9)$

$= (a+1)(a-9)$

$= (2x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 3x - 9)$

फिर $2x^2 - 3x + 1 = 2x^2 - 2x - x + 1$

$= 2x(x-1) - 1(x-1) = (2x-1)(x-1)$

और $2x^2 - 3x - 9 = 2x^2 - 6x + 3x - 9$

$= 2x(x-3) + 3(x-3) = (2x+3)(x-3)$

$\therefore$ $(2x^2 - 3x)^2 - 8(2x^2 - 3x) - 9$

$= (x-1)(x-3)(2x-1)(2x+3)$

उदाहरण 4. $(b+c)^2 - 6a(b+c) + 5a^2$ का गुणनखंड निकालो। (S.S. 62S)

मान लो $b + c = x$

$\therefore$ दी हुई राशि $= x^2 - 6ax + 5a^2$

$$= x^2 - ax - 5ax + 5a^2$$
$$= x(x-a) - 5a(x-a)$$
$$= (x-a)(x-5a)$$
$$= (b+c-a)(b+c-5a),$$ [x का मान रखने पर]

उदाहरण 5: $(x^2+5x)(x^2+5x-2)-24$ का गुणनखंड निकालो।

मान लो $x^2+5x=a$,

$\therefore$ दी हुई राशि $= a(a-2)-24$
$$= a^2-2a-24$$
$$= a^2-6a+4a-24$$
$$= a(a-6)+4(a-6)$$
$$= (a+4)(a-6)$$
$$= (x^2+5x+4)(x^2+5x-6),$$
[a का मान रखने पर]
$$= (x^2+x+4x+4)(x^2+6x-x-6)$$
$$= \{x(x+1)+4(x+1)\}\{x(x+6 \; -1(x+6)\}$$
$$= (x+1)(x+4)(x-1)(x+6)$$
$$= (x+1)(x-1)(x+4)(x+6).$$ उत्तर

दूसरा नियम—

दिये हुए व्यंजक के दो वर्गों के अन्तर (a^2-b^2) के रूप में लाकर गुणनखंड निकाल सकते हैं।

उदाहरण— $2x^2-9x-35$ का गुणनखण्ड निकालो।

(H.S. 61S)

$$2x^2-9x-35 = 2\left(x^2-\frac{9}{2}x \;\; -\frac{35}{2}\right)$$

$$= 2\left\{x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{9}{4} + \left(\frac{9}{4}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 - \frac{35}{2}\right\}$$

$$= 2\left\{\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{81}{16} - \frac{35}{2}\right\}$$

$$= 2\left\{\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{81+280}{16}\right\}$$

$$= 2\left\{\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{361}{16}\right\}$$

$$= 2\left\{\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 - \left(\frac{19}{4}\right)^2\right\}$$

$$= 2\left\{\left(x - \frac{9}{4} + \frac{19}{4}\right)\left(x - \frac{9}{4} - \frac{19}{4}\right)\right\}$$

$$= 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x - 7)$$

$$= (2x + 5)(x - 7)$$

EXAMPLE 34

गुणनखंड निकालो—

1. $6x^2 + 7x + 2$
2. $6x^2 - x - 12$
3. $2a^2 + a - 6$
4. $6x^2 - xy - 12y^2$
5. $4x^2 + 11x - 20$
6. $2a^2 + 5ab - 12b^2$
7. $4x^4 - 13x^2 - 12$
8. $2x^2 + 5x + 3$
9. $2x^2 + 7x + 3$
10. $6x^2 + 19x + 10$
11. $4x^2 - 17x + 4$
12. $24x^2 + 85x + 56$
13. $12x^2 - 19x - 21$
14. $15x^2 + 7x - 30$
15. $9x^2 - 86x + 45$
16. $10a^2b^2 + 27ab - 21$
17. $10a^2 - 19ab - 15b^2$
18. $2x^3y - 3x^2y^2 - 2xy^3$
19. $6x^2 - x - 15$ (P.U. 27)
20. $6x^2 - 7x - 3$
21. $2x^2 + 13x + 20$
22. $5 + 7x + 2x^2$

23. $2x^2+3x+1$

24. $5-9x-2x^2$

25. $3x^2-5x-8$ (P.U. 26)

26. $2x^2+5x-42$

27. $2x^2-13x+20$

28. $6x^2+x-2$

29. $6x^2+7x-3$

30. $14x^2-37x+5$ (63 S).

31. $12x^2-x-6$ (P.U. 20)

33. $18x^2+53x-35$

33. $12+x-20x^2$ (P.U.40S)

34. $15+x-28x^2$

35. $2a^2-5ab+2b^2$

36. $8a^2-14ab-15b^2$

37. $6x^2-23xy+20y^2$ (P.U. 29)

38. $4x^2+2x\left(a-\frac{1}{a}\right)-1$

39. $4x^2+2x\left(a+\frac{1}{a}\right)+1$

40. $2x^4-5x^2-12$

41. $8x^4+2x^2-45$ (H.S. 60S)

42. $6(a-b)^2-11(a-b)+3$ (H.S. 61A)

43. $2x^2+x-6$

44. $3x^2+x-2$

45. $3x^2-4x+1$

46. $6x^2-5x-4$

47. $4x^2-4x-3$

48. $4x^2-35x+24$

49. $4x^2+4x-35$

50. $6x^2+11x-10$

51. $3x^4-10x^2-8$

52. $12x^4+x^2y^2-y^4$

53. $18x^4+7x^2y^2-y^4$

54. $3(x+3)^2+(x+3)-44$

55. $3(x^2+1)^2+13(x^2+1)+4$

56. $(2x^2-3x)^2-8(2x^2-3x)-9$

57. $8(3x-5y)^2-16(3x-5y)(x-2y)-10(x-2y)^2$

58. $3x^4-16x^3-7x^2+32x+12$

59. $(x^2+x+4)^2+x(8x^2+23x+32)$

60. $5x^2+2xy-3y^2$

दस

कठिन गुणनखण्ड

(Harder Factors)

41, अभी तक विद्यार्थीगण a^2-b^2, a^2+b^2, a^3+b^3, a^3-b^3, और ax^2+bx+c आदि व्यंजकों के गुणनखंडीकरण की रीति से भली-भाँति परिचित हो चुके हैं। इस अध्याय में और भी कठिन व्यंजकों के गुणनखंडीकरण की रीति बतलायी जायगी, लेकिन इन व्यंजकों के गुणनखंडीकरण की रीति पहले ही वाले सूत्रों पर आधारित है। यहाँ किसी ऐसे नियम या पद्धति का जिक्र नहीं किया गया है जिसका प्रयोग हर हालत में हो सके। विशेष स्थितियों के अनुकूल व्यंजकों के गुणनखंडीकरण की रीति पर प्रकाश डाला गया है। बहुत से ऐसे व्यंजक भी मिलेंगे जिनका, परीक्षा (*Inspection*) द्वारा ही गुणनखंड निकाला गया है। इस अध्याय में पहले उन व्यंजकों पर विचार किया गया है जो एक विशेष प्रकार के हैं और जिनके गुणनखंडीकरण की रीति भी विशेष प्रकार की है।

42. Type 1. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+k$ रूप के व्यंजक का गुणनखंड—

विधि—इस प्रकार के व्यंजक के गुणनखंड निकालने के लिए चारो गुणनखंडों को दो-दो करके अलग-अलग इस प्रकार गुणा करना चाहिए कि गुणनफलों में x^2 और x के गुणक बराबर हों।

मान लो कि $(x+1)$ $(x+2)$ $(x+3)$ $(x+4)-3$ का गुणनखंड निकालना है। इसमें से दो-दो गुणनखंडों को इस प्रकार चुनो कि उनके प्रत्येक

गुणनफल में जो निश्चय ही ax^2+bx+c के रूप का है, ax^2+bx का रूप दोनों में सामान्य (*Common*) हो। स्पष्टत: $(x+1)$ तथा $(x+4)$ और $(x+2)$ तथा $(x+3)$ को एक-एक साथ गुणा करने पर गुणनफल में x^2 और x के गुणक बराबर मिलते हैं जो क्रमश: 1 और 5 हैं। अत: यह प्रश्न निम्न तरीके से बनेगा —

दिया हुआ व्यंजक $=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-3$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-3$

मान लो कि $=x^2+5x=y$,

$\therefore$ व्यंजक $=(y+4)(y+6)-3$

$=y^2+10y+21$

$=y^2+7y+3y+21$

$=y(y+7)+3(y+7)$

$=(y+3)(y+7)$

$=(x^2+5x+3)(x^2+5c+7)$

[y का मूल्य रखने पर]

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ का गुणनखंड निकालो। (P.U. 42A)

यहाँ दिया हुआ व्यंजक $=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}+1$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

मान लो $x^2+5x=y$,

$\therefore$ व्यंजक $=(y+4)(y+6)+1$

$=y^2+10y+25$

$=(y+5)^2$

$=(x^2+5x+5)^2$

[y का मूल्य रखने पर]

उदाहरण 2. $(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)-15$ का गुणनखंड निकालो। (59A)

यहाँ दिया हुआ व्यंजक $=\{(x-2)(x+3)\}\{(x-4)(x+5)\}-15$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-20)-15$

मान लो $x^2+x=y$,

$\therefore$ व्यंजक $=(y-6)(y-20)-15$

$=y^2-26y+105$

$=y^2-21y-5y+105$

$=y(y-21)-5(y-21)$

$=(y-5)(y-21)$

$=(x^2+x-5)(x^2+x-21)$

उदाहरण 3. $(x+2)(x-4)(x+4)(x-8)+9x^2$ का गुणनखंड निकालो।

विधि—इसका रूप भी पहले जैसा है, लेकिन यहाँ पर यदि $(x+2)(x-4)(x-4)(x+8)$ का पहले की तरह दो खंडों में बाँटा जाय तो ax^2+c सामान्य (*Common*) होता है न कि ax^2+bx

अब दिया हुआ व्यंजक $=\{(x+2)(x-8)\}\{(x-4)(x+4)\}+9x^2$

$=(x^2-6x-16)(x^2-16)+9x^2$

मान लो $x^2-16=a$,

$\therefore$ व्यंजक $=(a-6x)a+9x^2$

$=a^2-6ax+9x^2$

$=(a-3x)^2$

$=(x^2-3x-16)^2$ [a का मूल्य रखने पर]

उदाहरण 4. $x(2x+1)(x-2)(2x-3)-63$ का गुणनखंड निकालो। (H.S. 62A)

यहाँ दिया हुआ व्यंजक $=\{x(2x-3)\}\{(2x+1)(x-2)\}-63$

$=(2x^2-3x)(2x^2-3x-2)-63$

मान लो $2x^2-3x=y$,

$\therefore$ व्यंजक $= y(y-2)-63$

$= y^2 - 2y - 63$

$= y^2 - 9y + 7y - 63$

$= y(y-9) + 7(y-9)$

$= (y-9)(y+7)$

$= (2x^2 - 3x - 9)(2x^2 - 3x + 7)$

[y का मूल्य रखने पर]

लेकिन $2x^2 - 3x - 9 = (x-3)(2x+3)$

$\therefore$ व्यंजक $= (x-3)(2x+3)(2x^2 - 3x + 7)$ उत्तर

उदाहरण 5. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$—201 का गुणनखंड निकालो। (H.S. 68A)

दिया गया व्यंजक $= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) - 120$

$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) - 120$

मान लो कि $x^2 + 5x = a$

अत: दिया गया व्यंजक $= (a+4)(a+6) - 120$

$= a^2 + 10a - 96$

$= a^2 - 6a + 16a - 96$

$= a(a-6) + 16(a-6)$

$= (a-6)(a+16)$

$= (x^2+5x-6)(x^2+5x+16)$

$= (x^2 - x + 6x - 6)(x^2+5x+16)$

$= (x-1)(x+6)(x^2+5x+16)$. उत्तर

EXAMPLE 35

गुणनखंड निकालो—

1. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 3$ (62A)
2. $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6) + 48$ (H.S. 60S)
3. $(x+1)(x+2)(x+6)(x+7) + 4$

4. $(x-3)(x-4)(x-6)(x-8)-30x^2$
5. $x(x+2)(x+3)(x+5)+5$
6. $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+4$
7. $(x+2)(x-3)(x+4)(x-6)-24x^2$
8. $x(x-1)(x-2)(x-3)+1$
9. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-15$
10. $(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)-2x^2$
11. $(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)-15$
12. $(x-1)(x+2)(3x-1)(3x+2)+8x^2$
13. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$
14. $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+13$
15. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$ **(P.U. 43A, 59S, 61A, H.S. 95S)**
16. $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)-4$
17. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+7$
18. $(x+2)(x+3)(x-5)(x-6)+12$
19. $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)-84$
20. $(x+1)(x+4)(x+7)(x+10)-88$
21. $x(x+1)(x+2)(x+3)-3$
22. $x(x+2)(x+3)(x+5)+8$
23. $x(x+2)(x+4)(x+6)+7$ **(H.S. 63S)**
24. $x(x-1)(x+3)(x-4)+32$
25. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-35$
26. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$
27. $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+4$
28. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120$ **(P.U.36)**
29. $(x+2)(x-3)(x+4)(x-6)-6x^2$

30. $(x-3)(x-4)(x-6)(x-8)-30x^2$

31. $(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)-12x^2$

32. $(x-1)(3x-1)(x+2)(3x+2)+8x^2$

33. सिद्ध करो कि $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ एक पूर्ण वर्ग है।

34. सिद्ध करो कि $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+16$ एक पूर्ण वर्ग है।

43. Type II. व्युत्क्रम व्यंजकों (*Reciprocal expression*) का गुणनखंड निकालना—

परिभाषा—जिस व्यंजक के प्रथम पद और अन्तिम पद के गुणक बराबर हों तथा आरम्भ और अन्त से बराबर दूरी पर के पदों के गुणक भी बराबर हों, तो उस व्यंजक को व्युत्क्रम व्यंजक (*Reciprocal expression*) कहते हैं।

जैसे— $x^4+3x^3+4x^2+3x^3+1$ एक व्युत्क्रम व्यंजक है।

इस प्रकार के व्यंजकों के गुणनखंड समान गुणक वाले पदों को एक-एक साथ लेकर नीचे दिखाये ढंग से निकाले जाते हैं।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. $x^4-5x^3-12x^2-5x+1$ का गुणनखण्ड निकालो। (H.S. 61S)

दिया हुआ व्यंजक $=(x^4+1)-(5x^3+5x)-12x^2$

$=(x^4+1)-5x(x^2+1)-1x^2$

$=(x^2+1)^2-2x^2-5x(x^2+1)-12x^2$

$=(x^2+1)^2-5x(x^2+1)-14x^2$

मान लो $x^2+1=y$,

$\therefore$ व्यंजक $=y^2-5xy-14x^2$

$=y^2-7xy+2xy-14x^2$

$=y(y-7x)+2x(y-7x)$

$$= (y - 7x)(y + 2x)$$
$$= (x^2 - 7x + 1)(x^2 + 2x + 1)$$

[y का मान रखने पर]

उदाहरण 2. $12x^4 - 37x^3 + 45x^2 - 37x + 12$ का गुणनखण्ड निकालो। (P.U. 41)

दिया हुआ व्यंजक $= 12(x^4 + 1) - 37x(x^2 + 1) + 45x^2$

$$= 12(x^2 + 1)^2 - 24x^2 - 37x(x^2 + 1) + 45x^2$$
$$= 12(x^2 + 1)^2 - 37x(x^2 + 1) + 21x^2$$

मान लो $x^2 + 1 = y$,

$\therefore$ व्यंजक $= 12y^2 - 37xy + 21x^2$

$$= 12y^2 - 28xy - 9xy + 21y^2$$
$$= 4y(3y - 7x) - 3x(3y - 7x)$$
$$= (3y - 7x)(4y - 3x)$$
$$= (3x^2 - 7x + 3)(4x^2 - 3x + 4)$$

[y का मान रखने पर]

EXAMPLE 36

गुणनखंड निकालो—

1. $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1$
2. $x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1$
3. $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1$
4. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1$
5. $9x^4 + 3x^3 + 16x^2 + 3x + 9$
6. $x^4 - 5x^3 - 12x^2 - 5x + 1$
7. $x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 1$
8. $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1$
9. $x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1$
10. $x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1$
11. $x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 8x - 16$
12. $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2$
13. $2x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2$
14. $4x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 7x + 4$
15. $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1$
16. $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 2x + 1$

44. Type III. परीक्षा द्वारा गुणनखंड निकालना (**Factors by Trial**)—

विद्यार्थीगण यह भली-भाँति जान गये हैं कि यदि व्यंजक x का भ्रित *(Function)* हो और यदि x के वदले a रखने पर व्यंजक का मान शून्य के बराबर हो जाता है तो उस दिये गये व्यंजक का एक गुणनखण्ड $(x-a)$ होता है। उसी प्रकार यदि x के वदले $-a$ रखने पर व्यंजक का मान शून्य के बराबर हो जाता है तो उस दिये गये व्यंजक के गुणनखंड का पहला पद $(x+a)$ होता है।

ऊपर दिये गये साधारण नियम से निम्नलिखित सिद्धांत पाये जाते हैं—

यदि किसी व्यंजक में $x=1$ मान रखें, तो परिणाम भिन्न-भिन्न पदों के गुणकों का बीजगणितीय योग होगा। इस प्रकार $x=1$ रखने से किसी व्यंजक का मान 0 हो जाता है अर्थात्—

(i) यदि किसी व्यंजक के भिन्न-भिन्न पदों के गुणकों का बीजगणितीय *(Algebraic)* योगफल शून्य हो, तो $x-1$ उस व्यंजक का एक गुणनखण्ड होगा जैसे, $2x^2-6x+4$ में गुणकों का योगफल $=2-6+4=0$

$\therefore$ $x-1$, इस व्यंजक $2x^2-6x+4$ का पहला गुणनखंड होगा।

(ii) इसी प्रकार यदि व्यंजक के विषम *(odd)* घातवाले पदों के गुणकों का योगफल बाकी पदों के गुणकों के योगफल के समान हो, तो $x+1$ उस व्यंजक का एक गुणनखंड होगा, क्योंकि, $x=-1$ रखने से व्यंजक का मान शून्य हो जाता है।

जैसे, $2x^3-4x^2+5x+11$ में x^3 और x ही विषम घातवाले पद हैं। इन दो पदों के गुणकों का योगफल $=2+5=7$ और बाकी पदों के गुणकों का योगफल $=-4+11=7$

$\therefore$ व्यंजक $2x^3+4x^2+5x+1$ का एक गुणनखंड $x+1$ होगा।

(iii) यदि किसी व्यंजक के सभी पद धनात्मक हों, तो व्यंजक का मान शून्य होने के लिए x का मान ऋणात्मक होगा।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. गुणनखण्ड निकालो—

$$x^3 - 2x^2 - x + 2$$ (H. S. 64S)

यहाँ भिन्न-भिन्न पदों के गुणकों का योगफल $= 1 - 2 - 1 + 2 = 0$

$\therefore$ दी हुई राशि का एक गुणनखंड $x - 1$ होगा ।

अब $x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-1) - x(x-1) - 2(x-1)$

$= (x-1)(x^2 - x - 2)$

$= (x-1)(x^2 - 2x + x - 2)$

$= (x-1)(x-2)(x+1)$. उत्तर

उदाहरण 2. $3x^3 - 10x^2 + x + 6$ का गुणनखण्ड निकालो ।

(P. U. 38)

यहाँ भिन्न-भिन्न पदों के गुणकों का योगफल $= 3 - 10 + 1 + 6 = 0$

$\therefore$ $x - 1$, इस व्यंजक का एक गुणनखंड होगा ।

$\therefore$ $3x^3 - 10x^2 + x + 6 = 3x^2(x-1) - 7x(x-1) - 6(x-1)$

$= (x-1)(3x^2 - 7x - 6)$

$= (x-1)(3x^2 - 9x + 2x - 6)$

$= (x-1)(x-3)(3x+2)$. उत्तर

उदाहरण 3. $x^3 - 3x - 2$ का गुणनखंड निकालो । (H.S. 63S)

यहाँ x^3 और x विषम घातवाले पद हैं । इन पदों के गुणकों का योगफल $= 1 - 3 = -2$ और बाकी पदों के गुणकों का योगफल $= -2$

$\therefore$ व्यंजक का एक गुणनखंड $x + 1$ होगा ।

$\therefore$ $x^3 - 3x - 2 = x^2(x+1) - x(x+1) - 2(x+1)$

$= (x+1)(x^2 - x - 2)$

$= (x+1)(x^2 - 2x + x - 2)$

$= (x+1)(x-2)(x+1)$

$= (x-2)(x+1)^2$

उदाहरण 4. $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ का गुणनखंड निकालो।

(P.U. 44S)

यहाँ पर देखा जाता है कि अचल पद 3 का गुणनखंड 1×3 है। अतः व्यंजक का मूल्य 0 होने के लिए x का मूल्य $+1 -1 +3, -3$ हो सकता है लेकिन यहाँ पर व्यंजक के सभी पद धनात्मक हैं तो व्यंजक का मान शून्य करने के लिए x का मूल्य ऋणात्मक लेना होगा। अतः दिये हुए व्यंजक का मूल्य 0 होने के लिए x का मूल्य -1, या, -3 हो सकता है।

लेकिन व्यंजक में $x = -1$ रखने पर,

$x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = -1 + 6 - 10 + 3 = -2$ है,

अतः $x + 1$, व्यंजक का गुणनखंड नहीं हो सकता है।

लेकिन जब व्यंजक में $x = -3$ मान रखा जाता है, तो

$$x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = -27 + 54 - 30 + 3$$
$$= -57 + 57 = 0$$

अतः $x + 3$, इस व्यंजक का एक गुणनखंड होगा।

$\therefore \quad x^3 + 6x^2 + 10x + 3$

$= x^2(x+3) + 2x(x+3) + 1(x+3)$

$= (x+3)(x^2 + 2x + 1)$ उत्तर

उदाहरण 5. $x^2 + 3x - y^2 - 3y$ का गुणनखंड निकालो।

(S.S. 67A)

दिया गया व्यंजक $= x^2 + 3x - y^2 - 3y$

$= x^2 - y^2 + 3x - 3y$

$= (x-y)(x+y) + 3(3-y)$

$= (x-y)(x+y+3)$. उत्तर

उदाहरण 6. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ गुणनखंड निकालो।

(S.S. 67 A)

यहाँ भिन्न-भिन्न पदों के गुणकों का योगफल $= 1 - 6 + 11 - 6 = 0$

$\therefore$ दी हुई राशि का एक गुणनखंड $x - 1$ होगा।

अतः $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1)$

$= (x-1)(x^2 - 5x + 6)$

$= (x-1)\{x^2 - 2x - 3x + 6\}$

$= (x-1)\{x(x-2) - 3(x-2)\}$

$= (x-1)(x-2)(x-3).$ उत्तर

EXAMPLE 37

गुणनखंड निकालो—

1. $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$
2. $x^3 + 5x + 18$
3. $8x^3 + 16x - 9$
4. $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$
5. $x^4 - 5x^3 - 12x^2 - 5x + 1$
6. $x^3 - x^2 - 14x + 24$
7. $x^3 + 4x^2 + 9x + 10$
8. $x^3 + 2x^2 - x - 2$
9. $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$
10. $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$
11. $x^3 - 4x^2 - 4x - 5$
12. $x^3 + 5x^2 + 15x + 27$
13. $x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$
14. $x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 3x + 7$
15. $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$
16. $3x^3 + 10x^2 + 9x + 2$
17. $2x^3 + 5x^2 + x - 2$
18. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1$
19. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
20. $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$
21. $2x^3 - 9x^2 + 4x + 3$
22. $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$
23. $2x^3 + 9x^2 - 8x - 15$
24. $x^3 + 4x^2 + 4x + 3$
25. $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$
26. $3x^3 + 8x^2 - 8x - 3$
27. $x^3 + x^2 + 2x + 8$
28. $x^3 + 7x^2 - 21x - 27$
29. $x^3 + 5x^2 + 10x + 8$
30. $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$
31. $x^3 - 3x + 2$ (H.S. 63S)
32. $x^3 - 7x - 6$
33. $x^3 + 3x - 4$
34. $x^3 + 2x^2 - 3$
35. $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$
36. $x^3 + x^2 - 9x + 7$
37. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
38. $x^3 - 4x^2 + x + 2$

9. x^3+5x^2-2x-6

40. $x^3-6x^2+13x-10$

41. $x^3-3x^2-6x+16$

42. x^3+7x^2-36

43. $x^3-19x+30$

44. $2x^3-3x^2-4$

45. x^3-6x^2+32

46. x^3-6x^2+32

47. $x^3-5x+12$

48. $x^3-7x^2+13x-15$

49. $x^3-2x^2-23x+40$

50. x^3-x^2-x-15

45. Type IV. इस रूप में वे सारे व्यंजक आ जाते हैं जिनके पदों को एक विशेष रूप में सजाने पर गुणनखंडीकरण की रीति स्पष्ट हो जाती है। विषेश रूप में सजाने की रीति निम्न साधित उदाहरणों से स्पष्ट हो जायगी।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. गुणनखंड निकालो—

$$\mathbf{x^2-y^2-z^2+2yz+x+y-z} \quad \text{(H.S. 63A, 64A)}$$

दिया हुआ व्यंजक $=\{x^2-(y^2+z^2-2yz)\}+(x+y-z)$

$=x^2-(y-z)^2+(x+y-z)$

$=(x+y-z)(x-y+z)+(x+y-z)$

$=(x+y-z)(x-y+z+1)$ उत्तर

उदाहरण 2. गुणनखंड निकालो—

$$\mathbf{a^2+2ab-2ac-3b^2+2bc} \quad \text{(H.S. 60A)}$$

दिया हुआ व्यंजक $=a^2-b^2+2ab-2b^2-2ac+2bc$

$=(a^2-b^2)+2b(a-b)-2c(a-b)$

$=(a-b)\{(a+b)+2b-2c\}$

$=(a-b)(a+3b-2c)$ उत्तर

उदाहरण 3. गुणनखंड निकालो—

$$\mathbf{(a^2+1)y^2-y^4-a^2} \quad \text{(P.U. 48A, H.S. 61A, 63A)}$$

दिया हुआ व्यंजक $=a^2y^2-a^2-y^4+y^2$

$=a^2(y^2-1)-y^2(y^2-1)$

$$=(a^2-y^2)(y^2-1)$$
$$=(a-y)(a+y)(y+1)(y-1) \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 4. गुणनखंड निकालो—

$\mathbf{a^2-b^2-c^2-2bc+a-b-c}$

(P.U. 42A, 48, H.S. 60S)

दिया हुआ व्यंजक $=\{a^2-(b^2+c^2+2bc)\}+(a-b-c)$
$$=\{a^2-(b+c)^2\}+(a-b-c)$$
$$=(a+b+c)(a-b-c)+(a-b-c)$$
$$=(a-b-c)(a+b+c+1) \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 5. गुणनखंड निकालो—

$\mathbf{a^2+4ab-5b^2-c^2+6bc}$ (55 S.)

दिया हुआ व्यंजक $=a^2+4ab+4b^2-4b^2-5b^2-c^2+6bc$

($4b^2$ जोड़ने और घटाने पर)
$$=(a+2b)^2-(9b^2+c^2-6bc)$$
$$=(a+2b)^2-(3b-c)^2$$
$$=(a-b+c)(a+5b-c) \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 6. गुणनखंड निकालो—

$\mathbf{x^2+2xy-a^2-2ay}$ (P.U. 39S, H.S. 64A)

दिया हुआ व्यंजक $=x^2-a^2+2xy-2ay$
$$=(x^2-a^2)+2y(x-a)$$
$$=(x-a)(x+a+2y)$$

EXAMPLE 38

गुणनखंड निकालो—

1. $a^2-b^2+6bc-9c^2$ (62A)
2. $a^2-b^2-c^2-d^2+2ab+2cd$

3. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$ (P.U. 25, 33A)
4. $x^3-y^3+3y^2-3y+1$ (P.U. 36, H.S. 64A)
5. $x^2+5xy-24y^2+x-3y$
6. $2a^2-2bc+6b^2+ac-7ab$
7. $a^2-4ab+3b^2-4c^2+4bc$
8. $2a^2-ab+6a-3b$
9. $x^4+x^2y^2-y^2z^2-z^4$
10. $4ab-2a^2-2(b^2-1)$ (H.S. 63S)
11. $4x^2-4xy-2yz-z^2$ (S.S. 59A)
12. $x^2(y-1)-y^2(x-1)+x-y$ (P.U. 38)
13. $a^2+ax-3bx-9b^2$
14. $x^2-2ax-b^2+2ab$
15. $xy(1+z)+z^2(x^2+y^2)$
16. $xy-y^2+5y-3x-6$
17. $a^2-2ab+b^2+2a-2b$
18. $6a^2-ab-b^2+6a-3b$
19. x^2-xy+y^2-x+y
20. $4a^2-4ab+b^2-6a+3b$
21. $4a^2+12ab+9a^2-8a-12b$
22. $4a^2-b^2-9c^2+6bc$
23. $b^2-12ac-4a^2-9c^2$
24. $a^2-4b^2-25c^2+20bc$
25. $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$
26. $a^2+3ab+2b^2+ac+2bc$
27. $a^2+3b^2-1-4ab+2b$
28. $a^2-10ab-15bc+21b^2+5ac$
29. $a^2-3a(2b-1)+4b(2b-3)$

30. $(a^2-b^2)(x^2+y^2)+2(a^2+b^2)xy$

31. $x^2-6xy+8y^2-z^2+2yz$

32. $a^2+4ab-5b^2-c^2+6bc$

33. $a^2+4ab+3b^2-c^2-2bc$

34. $x^2-6xy-5y^2-z^2+4yz$

35. $x^2+2xy-8y^2-4z^2+12y$

36. $8a^2-b^2-c^2-2ab-2ac-2bc$

46. Type V. दूसरे परिमाण (Dimension) वाले समघाती व्यंजकों (Homogeneous expression) का गुणनखंड निकालना—

निम्नलिखित उदाहरणों से गुणनखंडीकरण की रीति स्पष्ट होगी।

उदाहरण 1. गुणनखंड निकालो—

$$6a^2+7ab+2b^2+11ac+7bc+3c^2$$

दिये हुए व्यंजक में $a=0$ रखने पर,

बाकी व्यंजक $=2b^2+7bc+3c^2$

$=(2b+c)(b+3c)$ ....(1)

दिये हुए व्यंजक में $b=0$ रखने पर,

बाकी व्यंजक $=6a^2+11ac+3c^2$

$=(3a+c)(2a+3c)$ ... .(2)

दिये हुए व्यंजक में $c=0$ रखने पर,

बाकी व्यंजक $=6a^2+7ab+2b^2$

$=(3a+2b)(2a+b)$ ....(3)

अब (1), (2) और (3) द्वारा सूचित फलों से स्पष्ट जाना जाता है कि दिया हुआ व्यंजक $=(2a+2b+c)(2a+b+3c)$,

[कारण—इन दो गुणनखण्डों में यदि (i) $a=0$ माना जाय तो (1) द्वारा सूचित गुणनखण्ड, (ii) $b=0$ माना जाये तो (2) द्वारा सूचित गुणनखण्ड (iii) $c=0$ माना जाये तो (3) द्वारा सूचित गुणनखण्ड प्राप्त होता है।]

विकल्प विधि (**Alternative Method**)—दिये हुए को व्यंजक उसके किसी अक्षर, मान लो a, के घातों के अवरोह पदों को क्रमानुसार लिखने पर,

$$\text{दिया हुआ व्यंजक} = 6a^2 + (7b + 11c)a + (2b^2 + 7bc + 3c^2)$$
$$= 6a^2 + (7b + 11c)a + (2b + c)(b + 3c)$$

अब $(2b + c)(b + 3c)$ और (a^2 के गुणक) 6 के गुणनफल के ऐसे दो गुणनखण्ड निकालो जिनका बीजगणितीय योगफल a के गुणक अर्थात् $(7b + 11c)$ के बराबर हो। ध्यानपूर्वक विचार करने से देखा जाता है कि $2(2b + c)$ और $3(b + 3c)$ दो गुणनखण्ड हैं।

$$\text{अब दिया हुआ व्यंजक} = 6c^2 + 2(2b + c)a + 3(b + 3c)a + (2b + c)(b + 3c)$$
$$= 3a\{2a + (2b + c)\} + (b + 3c)\{3a + (2b + c)\}$$
$$= (3a + 2b + c)(2a + b + 3c)$$

उदाहरण 2. गुणनखण्ड निकालो—

$$x^2 + yx - 2y^2 + 2x - 5y - 3$$

दिये हुए व्यंजक में $x = 0$ रखने पर,

$$\text{बाकी व्यंजक} = -2y^2 - 5y - 3$$
$$= -(2y^2 + 5y + 3)$$
$$= -(2y^2 + 2y + 3y + 3)$$
$$= -(y + 1).2y + 3)$$
$$= (-y - 1)(2y + 3) \quad \ldots\ldots \quad \ldots(1)$$

दिये हुए व्यंजक में $y = 0$ रखने पर,

$$\text{बाकी व्यंजक} = x^2 + 2x - 3$$
$$= x^2 + 3x - x - 3$$
$$= (x - 1)(x + 3) \quad \ldots\ldots \quad \ldots(2)$$

अब, (-1) के साथ समोकरण (2) में x और (1) में $-y$ है
और 3 के साथ समीकरण (2) में x और (1) में $2y$ है।

$\therefore$ इष्ट गुणनखण्ड $=(x-y-1)(x+2y+3)$

उदाहरण 3. गुणनखण्ड निकालो—

(i) $10x^2-11xy-3y^2+14x+13y-12$ (H.S.61A)

(ii) $x^2+bx-a^2+3ab-2b^2$ (H.S.65A)

(i) दिये हुए व्यंजक में $x=0$ रखने पर,

बाकी व्यंजक $=-3y^2+13y-12$

$=-(3y^2-13y+12)$

$=-(3y^2-9y-4y+12)$

$=-\{3y(y-3)-4(y-3)\}$

$=-(y+3)(3y-4)$

$=(y-3)(-3y+4)$ ....(1)

पुनः दिये हुए व्यंजक में $y=0$ रखने पर,

बाकी व्यंजक $=10x^2+14x-12$

$=2(5x^2+7x-6)$

$=2\{5x^2+10x-3x-6\}$

$=2\{5x(x+2)-3(x+2)\}$

$=2(5x-3)(x+2)$

$=(5x-3)(2x+4)$ ....(2)

अब, (-3) के साथ समीकरण (1) में y और (2) में $5x$ है और 4 के साथ (1) में $-3y$ और (2) में $2x$ है।

$\therefore$ इष्ट गुणनखण्ड $=(5x+y-3)(2x-3y+4)$

(ii) दिये हुए व्यंजक में $x=0$ रखने पर,

बाकी व्यंजक $=-a^2+3ab+2ab^2$

$=-(a^2-3ab-2b^2)$

$= -(a^2 - 2ab - ab + 2b)$

$= -\{a(a-2b) - b(a-2b)\}$

$= -(a-2b)(a-b)$

$= (a-b)(-a+2b)$ ....(1)

दिये हुए व्यंजक में $a = 0$ रखने पर,

बाकी व्यंजक $= x^2 + bx - 2b^2$

$= x^2 + 2bx - bx - 2b^2$

$= x(x+2b) - b(x+2b)$

$= (x-b)(x+2b)$ ....(2)

दिये हुए व्यंजक में $b = 0$ रखने पर,

बाकी व्यंजक $= x^2 - a^2$

$= (x-a)(x-b)$ ....(3)

अब $(-b)$ के साथ समीकरण (1) में a है तथा (2) में x है और $2b$ के साथ (1) में $-a$ है तथा (2) में x है।

∴ इष्ट गुणनखण्ड $= (x+a-b)(x-a+2b)$

EXAMPLE 39

गुणनखण्ड निकालो—

1. $4a^2 - 12ab + 9b^2 - 4a + 6b - 3$
2. $x^2 + xy - 2y^2 + 2x - 5y - 3$
3. $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y + 2$
4. $x^2 + x - a^2 - 3a - 2$ (H.S. 62A)
5. $2x^2 + 6y^2 - 7xy + x - y - 1$ (H.S. 62S)
6. $x^2 + 6x - y^2 + 4y + 5$
7. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 5xy + 5xz + 7yz$
8. $x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 3y + 1$
9. $x^2 - 3xy + 2y^2 - 2yz - 4z^2$

10. $a^2 - 3ab + 2b^2 - bc - 4c^2$

11. $2x^2 - 3y^2 - 4z^2 - xy - 2zx - 7yz$

12. $2x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 5xy + 7zx + 8yz$

13. $4x^2 - 4xy - 3y^2 + 12yz - 9z^2$

14. $xy - y^2 + 5y - 3x - 6$ (P.U. 33)

15. $3a^2 - ab + 4b^2 + 4b - 3$

16. $6x^2 - xy - 12y^2 - 4x - 11y - 2$

17. $6x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 9xz - 5yz$

18. $6x^2 - y^2 - z^2 - xy - 3yz + xz$

19. $6x^2 + 2y^2 + 7xy + 11x + 7y + 3$

20. $6a^2 + 7ab + 2b^2 + 11ac + 7bc + 3c$

21. $6x^2 - 6y^2 + 5xy + 2x - 23y - 20$

22. $6x^2 - 17xy + 12y^2 - 3x + 5y - 3$

23. $x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 12yz + 4x - 8y + 12z$

24. $a^2 + 3b^2 - 4c^2 - 4ac + 4bc$

25. $2x^2 + xy - 3y^2 - xz - 4z - zy^2$

47. Type VI चक्रीय क्रम (Cyclic order)—मान लो कि किसी वृत्त की परिधि पर तीन अक्षर a, b, c अंकित हैं। यदि तीर के निशान को ध्यान में रखें तो a के बाद b, b, के बाद c और c के बाद फिर a मिल जाता है।

तीनों अक्षर a, b और c इस क्रम में बार-बार आते हैं अक्षरों के इस क्रम को चक्रीय क्रम (*Cyclic order*) कहते हैं। यह चक्रीय क्रम किसी भी अक्षर से आरम्भ किया जा सकता है। निम्नलिखित व्यंजक चक्रीय क्रम में लिखे गये हैं—

(i) abc, bca, cab (ii) $a+b, b+c, c+a$ (iii) $a(b \pm c)$ $b(c \pm a)$, $c(a \pm b)$ इत्यादि।

48. चक्रीय क्रमवाले व्यंजकों का गुणनखण्ड निकालना—

इसमें कुछ प्रामाणिक चक्रीय व्यंजकों के गुणनखंडीकरण की रीति बतलायी जायगी। विद्यार्थियों को इन्हें भली-भाँती समझ लेना चाहिए।

A. (i) $P + 2abc$ और $P + 3abc$

जहाँ $P = a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)$ .... (1)

$= bc(b+c) + ca(c+a) + ac(a+b)$ .... (2)

$= a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2)$ .... (3)

वास्तव में (1), (2), और (3) द्वारा सूचित तीनों व्यंजक एक ही व्यंजक हैं, जो कि विभिन्न रूपों में प्रकाशित किये गये हैं।

(i) यदि P, (1) द्वारा सूचित व्यंजक हो, तो

$$P + 2abc = a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc$$

(59S, H.S. 61A)

$$= a^2(b+c) + a(b^2 + 2bc + c^2) + b^2c + bc^2$$

[a को घातों में सजाने पर]

$$= a^2(b+c) + a(b+c)^2 + bc + (b+c)$$

$$= (b+c)\{a^2 + a(b+c) + bc\}$$

$$= (b+c)(c+a)(a+b)$$

उसी प्रकार (i) में यदि P, (2) अथवा (3) द्वारा सूचित व्यंजक हो, तो

$$P + 2abc = (b+c)(c+a)(a+b)$$

[∵ (1), (2) और (3) द्वारा सूचित व्यंजक एक ही हैं।

(ii) यदि P, (2) द्वारा सूचित व्यंजक हो, तो

$$P + 3abc = ba(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + 3abc$$

(P.U. 43A, 45S, S.S. 58S)

$$= bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + abc + abc + abc$$

$$=\{bc(b+c)+abc\}+\{ca(c+a)+abc\}$$
$$+\{ab(a+b)+abc\}$$
$$=bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)(bc+ca+ab)$$

उसी प्रकार (ii) यदि P, (1) अथवा (3) में द्वारा सूचित व्यंजक हो, तो

$$P+3abc=(a+b+c)(bc+ca+ab)$$

[∵ (1), (2), (3) द्वारा सूचित व्यंजक एक ही तरह के हैं।]

B. नीचे दिये हुए व्यंजकों में से यदि कोई भी Q द्वारा सूचित हो तो Q का गुणनखण्ड निकालना—

(i) $\mathbf{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$

(P.U. 19, 41, S.S. 57A, 64S)

(ii) $\mathbf{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}$

(iii) $\mathbf{-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}}$

यहाँ भी (i), (ii) और (iii) द्वारा सूचित तीनों व्यंजक एक ही व्यंजक हैं, जो कि विभिन्न रूपों में प्रकाशित किये गये हैं।

यदि Q पहले रूप का व्यंजक हो, तो

$$Q=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-bc^2$$
$$=(b-c)\{a^2-a(a+c)+bc\}$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)$$

उसी प्रकार Q यदि दूसरे अथवा तीसरे रूप का व्यंजक हो, तो

$$Q=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)$$

और $$Q=-a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)$$

[क्योंकि (i), (ii) और (iii) द्वारा सूचित व्यंजक एक ही व्यंजक हैं।]

उप-सूत्र—अगर a, b, c के बदले क्रमशः a^2, b^2, c^2 लिखें तो, तीनों परिस्थितियों में $Q = -(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)$

C. $\mathbf{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)}$ **का गुणनखण्ड निकालना—** **(P.U. 31S, H.S. 63A)**

दिया हुआ व्यंजक $= a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$

$$= a^3(b-c) - (ab^3 - ac^3) + (b^3c - bc^3)$$
$$= a^3(b-c) - a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - b^2)$$
$$= (b-c)\{a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)\}$$
$$= (b-c)\{(b^2c - b^2a) + (bc^2 - abc) - (ac^2 - a^3)\}$$
$$= (b-c)\{b^2(c-a) + bc(c-a) - a(c^2 - a^2)\}$$
$$= (b-c)(c-a)\{b^2 + bc - a(c+a)\}$$
$$= (b-c)(c-a)\{bc - ac) + (b^2 - a^2)\}$$
$$= (b-c)(c-a)\{c(b-a) + (b^2 - a^2)\}$$
$$= (b-c)(c-a)(b-a)\{c+b+a)\}$$

चक्रीय क्रम में लिखने पर,

$$= -(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$

D. $\mathbf{a^3(b^2-c^2) + b^3(c^2-a^2) + c^3(a^2-b^2)}$ **का गुणनखण्ड निकालना—**

दिया हुआ व्यंजक $= a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$

$$= a^3(b^2 - c^2) - (a^2b^3 - a^2c^3) + (b^3c^2 - c^3b^2)$$
$$= a^3(b^2 - c^2) - a^2(b^3 - c^3) + b^2c^2(b-c)$$
$$= (b-c)\{a^3(b+c) - a^2(b^2 + bc + c^2) + b^2c^2\}$$
$$= (b-c)\{(b^2c^2 - a^2b^2) - (a^2bc - a^3b) - (a^2c^2 - a^3c)\}$$
$$= (b-c)\{b^2(c^2 - a^2) - a^2b(c-a) - a^2c(c-a)\}$$
$$= (b-c)(c-a)\{b^2(c+a) - a^2b - a^2c\}$$

$$= (b-c)(c-a)\{b^2c - a^2c) + (b^2a - a^2b)\}$$
$$= (b-c)(c-a)\{c(b^2-a^2) + ab(b-a)\}$$
$$= (b-c)(c-a)(b-a)(ab+bc+ca)$$

चक्रीय क्रम में लिखने पर,

$$= -(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)$$

E. $\mathbf{a^3+b^3+c^3-3abc}$ **का गुणनखण्ड निकालना—**

दिया हुआ व्यंजक $= a^3+b^3+c^3-3abc$

$$= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc$$
$$= \{(a+b)^3 + c^3\} - 3ab(a+b+c)$$
$$= (a+b+c)\{(a+b)^2 - (a+b)c + c^2\} - 3ab(a+b+c)$$
$$= (a+b+c)\{(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 - 3ab\}$$
$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bb-ca).$$

F. $\mathbf{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}$ **का गुणनखण्ड निकालना—**

दिया हुआ व्यंजक $= 2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

$$= 4b^2c^2 - 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$$
$$= 4b^2c^2 - (2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2 + a^4 + b^4 + c^4)$$
$$= (2bc)^2 - (a^2-b^2-c^2)^2$$
$$= (2bc + a^2 - b^2 - c^2)(2bc - a^2 + b^2 + c^2)$$
$$= \{a^2 - (b^2+c^2-2bc)\}\{(b^2+c^2+2bc) - a^2\}$$
$$= \{a^2 - (b-c)^2\}\{(b+c)^2 - a^2\}$$
$$= (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. $\mathbf{(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc}$ **का गुणनखण्ड निकालो।** **(P.U. 27, 49, S.S. 47S, 61S)**

दिया हुआ व्यंजक $= \{a+(b+c)\}\{a(b+c)+bc\} - abc$

$$= a^2(b+c) + abc + a(b+c)^2 + bc(b+c) - abc$$
$$= a^2(b+c) + a(b+c)^2 + bc(b+c)$$
$$= (b+c)\{a^2 + a(b+c) + bc\}$$
$$= (b+c)\{(a^2+ab) + (ac+bc)\}$$
$$= (b+c)\{a(a+b) + c(a+b)\}$$
$$= (b+c)(c+a)(a+b).$$

उदाहरण 2. $a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2)$ का गुणनखण्ड निकालो। (P.U. 49A, H.S. 64A)

दिया हुआ व्यंजक $= a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2)$
$$= a(b^2-c^2) + (b^2c - bc^2) - (a^2b - ca^2)$$
$$= a(b^2-c^2) - bc(b-c) - a^2(b-c)$$
$$= (b-c)\{a(b+c) - bc - a^2\}$$
$$= (b-c)\{(ab-a^2) - (bc-ac)\}$$
$$= (b-c)\{a(b-a) - c(b-a)\}$$
$$= (b-c)(b-a)(a-c)$$
$= (b-c)(c-a)(a-b)$ चक्रीय क्रम से।

उदाहरण 3. $bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2) + ab(a^2-b^2)$ का गुणनखण्ड निकालो। (H.S. 62A)

दिया हुआ व्यंजक $= bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2) + ab(a^2-b^2)$
$$= bc(b^2-c^2) + c^3a - ca^3 + a^3b - ab^3$$
$$= bc(b^2-c^2) - (ab^3 - c^3a) + (a^3b - ca^3)$$
$$= bc(b^2-c^2) - \{a(b^3-c^3) - a^3(b-c)\}$$
$$= (b-c)\{bc(b+c) - a(b^2+bc+c^2) + a^3\}$$
$$= (b-c)\{b^2c + bc^2 - ab^2 - abc - ac^2 + a^3\}$$
$$= (b-c)\{b^2(c-a) - a(c^2-a^2) + bc(c-a)\}$$
$$= (b-c)(c-a)\{b^2 - a(c+a) + bc\}$$

$$=(b-c)(c-a)\{b^2-a^2-ac+bc\}$$
$$=(b-c)(c-a)\{(b^2-a^2)+c(b-a)\}$$
$$=(b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

[चक्रीय क्रम से ।

उदाहरण 4. $x^3-y^3+6xy+8$ का गुणनखंड निकालो ।

H.S. 63A)

दिया हुआ व्यंजक $=x^3+(-y)^3+(2)^3-3(x)(-y)(2)$
$$=\{x+(-y)+2)\}\{x^2+(-y)^2+(2)^2-(-y)\cdot 2-2x-x(-y)\}$$
$$=(x-y+2)(x^2+y^2+4+2y-2x+xy).$$

उदाहरण 5. $a^3-b^3+1+3ab$ का गुणनखण्ड निकालो ।

(63S, H.S. 60A, 48A)

दिया हुआ व्यंजक $=(a)^3+(-b)^3+(1)^3-3(a)(-b)\cdot 1$
$$=\{a+(-b)+1\}\{a^2+(-b)^2-(1)^2-(-b)\cdot 1-1\cdot a-a(-b)\}$$
$$=(a-b+1)(a^2+b^2+1+b-a+ab)$$

उदाहरण 6. जब $a+b+c=15$ और $ab+bc+ca=75$ हो, तो $a^3+b^3+c^3-3abc$ की कीमत बताओ । (63A, H.S. 65S)

$\because$ $a^3+b^3+c^2-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

और $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ca+bc)$

$\therefore$ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+ca+bc)\}$
$$=15\times\{15^2-3\times 75\}$$
$$=15\times\{225-225\}$$
$$=15\times 0=0$$

EXAMPLE 40

गुणनखंड निकालो—

1. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$
2. $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$
3. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$
4. $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$
5. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$
6. $-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$
7. $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz$
8. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

(P.U. 19, 41, S. S. 57A, 63A, 64S)

9. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ (P.U. 30S)
10. $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+3xyz$
11. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$
12. $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$
13. $x^2y^2(x-y)+y^2z^2(y-z)+z^2x^2(z-x)$
14. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+9abc$
15. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$
16. $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2+8xyz$
17. $b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2)$
18. $x^4(y-z)+y^4(x-y)+z^4(x-y)$
19. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$
20. $a^3-b^3+c^3+3abc$
21. $a^3+b^3-c^3+3abc$
22. $a^3-b^3-c^3-3abc$
23. x^6+32x^3-64
24. a^6-18a^3+125
25. $x^3+8y^3+27z^3-18xyz$
26. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

27. $8x^3 - y^3 - z^3 + 6xyz$

28. $72y^2z^2 + 18z^2x^2 + 8x^2y^2 - x^4 - 16y^4 - 18z^4$

29. $(a^2 - b^2)(a + b) + (b^2 - c^2)(b + c) + (c^2 - a^2)(c + a)$ (H.S. 62S)

30. $(x^2 - bc)(b - c) + (x^2 - ca)(c - a) + (x^2 - ab)(a - b)$

31. $(a^2 + bc)(b - c) + (b^2 + ca)(c - a) + (c^2 + ab)(a - b)$

32. $(a^2 + a + 1)(b - c) + (b^2 + b + 1)(c - a) + (c^2 + c + 1) \times (a - b)$

33. $(a + 1)^2(b - c) + (b + 1)^2(c - a) + (c + 1)^2(a - b)$

34. $(1 + b)(1 + c)(b - c) + (1 + c)(1 + a)(c - a) + (1 + a)(1 + b)(a - b)$

35. $a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$ (P.U. 23)

36. $a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b)$

37. $a^2(b - c)^3 + b^2(c - a)^3 + c^2(a - b)^3$

38. $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$

39. $(2x - 3y)^3 + (3y - z)^3 + (z - 2x)^3$

40. $(x + y - z)^3 + (x - y + z)^3 - 8x^3$

41. $\dfrac{x^3}{y^3} + \dfrac{y^3}{z^3} + \dfrac{z^3}{x^3} - 3$

42. $a^3(b - c)^3 + b^3(c - a)^3 + c^3(a - b)^3$

साबित करो कि—

43. $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) + (b - c)(c - a)(a - b) = 0$

44. $a(b + c)^2 + b(c + a)^2 + c(a + b)^2 = (b + c)(c + a)(a + b) + 4ab$

45. $a^3(b + c) + b^3(c + a)(a + b) + abc(a + b + c) = (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)$

मूल्य निकालो—

46. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$, यदि $b+c-a=7$, $c+a-b=10$, $a+b-c=3$ है।

47. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$, यदि $a+b+c=20$, $bc+ca+ab=18$, $abc=37$ है।

48. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3+3abc$, यदि $a+b+c=13$, $a^2+b^2+c^2=69$ है।

49. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$, यदि $a+b+c=6$, $ab+bc+ca=11$, $abc=6$ है।

50. $(x+y+z)(yz+zx+xy)$, यदि $x+y=5$, $y+z=7$, $z+x=6$ है।

51. $a^3+b^3+c^3$, यदि $b+c=5$, $c+a=6$, $a+b=7$ है।

52. $x^3+y^3+z^3-3xyz$, यदि $x+y+z=12$, $x^2+y^2+z^2=64$ है।

53. $a^3+b^3+c^3-3abc$, यदि $a=665$, $b=666$, $c=669$ है।

54. $a^3+b^3+c^3-3abc$ की कीमत बताओ, जब

(i) $a+b+b=8$ और $a^2+b^2+c^2=30$

(ii) $a+b+c=9$ और $ab+bc+ca=26$ (P.U. 35)

(iii) $a+b+c=13$ और $bc+ca+ab=45$

55. $x^3+y^3+z^3-3xyz$ का मूल्य निकालो जब $x=b-c$, $y=c-a$ और $z=a-b$

56. यदि $x+y+z=0$ हो, तो साबित करो कि $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2+9xyz=0$

57. यदि $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$ और $z=c^2-ab$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3+y^3+z^3-3xyz=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$

58. यदि $x + y + z = a$, $yz + zx + xy = b$, $xyz = c$ हो, तो साबित करो कि $x^3 + y^3 + z^3 = a^3 - 3ab + 3c$

साबित करो—

59. $a^3(b - c)^3 + b^3(c - a)^3 + c^3(a - b)^3 = 3abc(b - c)(c - a)(a - b)$

60. $(2x - y - z)^3 + (2y - z - x)^3 + (2z - x - y)^3$
$= 3(2x - y + z)(2y - z - x)(2z - x - y)$

—o::o—

ग्यारह

महत्तम समापवर्त्तक

(Highest Common Factor)

49. पिछले अध्याय में हमलोगों ने देखा है कि यदि किसी बीजगणितीय व्यंजक को उसके किसी एक गुणनखंड से भाग दिया जाय, तो पूरा-पूरा भाग लग जाता है। जैसे, यदि एक बीजगणितीय व्यंजक $x^2y^2z^2$ हो, तो x^2, y^2 और z^2 तीनों ही उसके गुणनखंड कहे जायेंगे क्योंकि $x^2y^2z^2 = x^2 \times y^2 \times z^2$· गुणनखंड का दूसरा नाम अपवर्त्तक भी है।

फिर यदि हम दो राशियाँ xy और xz लें, तो हम देखेंगे कि एक गुणनखंड x ऐसा है, जो दोनों में ही पाया जाता है। इसलिए x को xy और xz दोनों का सामान्य गुणनखंड (*Common factors*) कहेंगे। इससे स्पष्ट है कि दो या दो से अधिक राशियों का सामान्य गुणनखण्ड वह राशि है, जिससे उन सब में पूरा-पूरा भाग लग जाय। इस सामान्य गुणनखंड को समापवर्त्तक कहा जाता है।

अब हम देखते हैं कि x^2y^2 और x^2yw इन राशियों के सामान्य गुणनखंड (समापवर्त्तक) x, xy एवं x^2y, ये तीनों ही कहे जा सकते हैं। लेकिन इन तीनों में x^2y सबसे बड़ा है, इसलिए यही उसका महत्तम समापवर्त्तक (सबसे बड़ा समापवर्त्तक) कहा जायगा।

अतएव दो या दो से अधिक बीजगणितीय राशियों का महत्तम समापवर्त्तक वह राशि है, जो सबका सामान्य गुणनखंड हो और जिसका मान सबसे अधिक हो। इसे संक्षेप में म० स० (*H. C. F.*) लिखते हैं।

50. महत्तम समापवर्त्तक निकालने का नियम—

I. ऐसे संयुक्त व्यंजकों का म० स० निकालना जिनके गुणनखंड सुगमता से निकाले जा सकते हों—

सबसे पहले दिये हुए व्यंजकों का गुणनखंड निकालो। वे खंड जो सब में वर्त्तमान हों उनका गुणनफल ही सभी व्यंजकों का म० स० होगा। राशियों

उदाहरण 1. म० स० निकालो—

(i) $8x^4y^2, 12x^2y^3$

(ii) $12a^3x^3y, 16a^2x^5y^3$ और $20a^4x^5$

(i) यहाँ $8x^4y^2 = 4 \times 2 \times x^2 \times x^2 \times y^2$

$12x^2y^3 = 4 \times 3 \times x^2 \times y^2 \times y$

दोनों में $4 \times x^2 \times y^2$ शामिल हैं।

अतः $8x^4y^2$ और $12x^2y^3$ का म० स० $= 4x^2y^2$

(ii) $12a^3x^3y = 4 \times 3 \times a^2 \times a \times x^3 \times y$

$16a^2x^5y^3 = 4 \times 4 \times a^2 \times x^2 \times x^3 \times y^2 \times y$

$20a^4x = 4 \times 5 \times a^2 \times a^2 \times x^3 \times x^2$

तीनों में $4 \times a^2 \times x^3$ शामिल हैं।

अतः $12a^3x^3y, 16a^2x^5y^3, 20a^4x^5$ का म० स० $= 4a^2x^3$

उदाहरण 2. म० स० निकालो—

(i) $2a^2 - 7a + 3$ और $3a^2 - 7a - 6$

(ii) $x^2 + 5x + 6, x^2 - 2x - 8$ और $x^2 + 7x + 10$ (63S)

(i) $2a^2 - 7a + 3 = 2a^2 - 6a - a + 3$

$= 2a(a-3) - 1(a-3)$

$= (a-3)(2a-1)$

और $3a^2 - 7a - 6 = 3a^2 - 9a + 2a - 6$

$= 3a(a-3) + 2(a-3)$

$= (a-3)(3a+2)$

दोनों व्यंजकों में $a-3$ गुणनखंड शामिल है।

$\therefore$ $2a^2-7a+3$ और $3a^2-7a-6$ का म० स० $=a-3$

(ii) $x^2+5x+6=x^2+3x+2x+6$

$=x(x+3)+2(x+3)=(x+2)(x+3)$

$x^2-2x-8=x^2-4x+2x-8$

$=x(x-4)+2(x-4)=(x+2)(x-4)$

और $x^2+7x+10=x^2+5x+2x+10$

$=x(x+5)+2(x+5)=(x+2)(x+5)$

तीनों व्यंजकों में $x+2$ गुणनखंड शामिल है।

अत: इष्ट म० स० $=x+2$

उदाहरण 3. $x^3+6x^2+11x+6$ और x^2+6x+8 का म० स० निकालो। (S.S.67A)

पहला व्यंजक $=x^3+6x^2+11x+6$

$=x^3+x^2+5x^2+5x+6x+6$

$=x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)$

$=(x+1)(x^2+5x+6)$

$=(x+1)(x+2)(x+3)$

और दूसरा व्यंजक $=x^2+6x+8$

$=x^2+2x+4x+8$

$=(x+2)(x+4)$

स्पष्टत: $x+2$ दोनों व्यंजकों में उभयनिष्ट है

अत: म० स० $=x+2$

उदाहरण 4. $x^3-3x^2-4x+12$ और $x^3-7x^2+16x-12$ का H. C. F. निकालो। (S.S. 57A)

पहला व्यंजक $=x^3-3x^2-4x+12$

$x^3-2x^2-x^2+2x-6x+12$

$=x^2(x-2)-x(x-2)-6(x-2)$

$= (x-2)(x^2-x-6)$

$= (x-2)(x^2-3x+2x-6)$

$= (x-2)(x+2)(x-3)$

दूसरा व्यंजक $= x^3-7x^2+16x-12$

$= x^2(x-3)-4x(x-3)+4(x-3)$

$= (x-3)(x^2-4x+4)$

$= (x-3)(x-2)^2$

अतः म॰ स॰ $= (x-2)(x-3)$

$= x^2-5x+6$

EXAMPLE 41

महत्तम समापवर्त्तक निकालो—

1. $4a^5b$ और $6a^4b^3$ 2. $a^2+ab,\ a^2-b^2$
3. $x^2+xy,\ y^2+xy$
4. $20a^3b^5c^7,\ 24a^2b^2c^3,\ 36a^4b^4c^5,\ 2a^3b^3c^5$
5. $18xy^3,\ 36x^2y^2,\ 45x^5y^4$ 6. $x^2-4,\ 3x-6$
7. $a(a+b),\ a(a-b)$ 8. $a^2-ab,\ a^3-a^2b$
9. $x^3y^2+x^2y^3,\ x^4(x^2-y^2)$
10. $3x^3-7x^2-18x-8,\ 2x^3-3x^2-17x-12$ (56S)
11. $x^3+4x^2+4x+3,\ x^3+8x^2+21x+18$ (54S, 61S)
12. $(x-1)(x-2)(x+3)x^4,\ x^3+5x^2-2x-24$
13. $2x^4+5x^3+8x^2+11x+4,\ 4x^2+4x+1$
14. $2x^2-3x-2,\ 3x^2-10x+8$
15. $2x^2-x-1,\ 3x^2-x-2$
16. $3x^2-x-2,\ 6x^2-5x-1$
17. $x^3+5x^2+6x,\ x^3+7x^2+10x$
18. $x^3+7x^2+12x,\ x^3-2x^2-15x$

19. $x^2-1,\ x^3-1,\ x^2+x-2$
20. $x^2+x,\ (x+1)^2,\ x^3+1$
21. $x^2-3x+2,\ x^2-4x+3,\ x^2-5x+4$
22. $x^2-5x+6,\ x^2-7x+10,\ x^2-9x+14$
23. $x^2+6x+8,\ x^2-3x-10,\ x^2-4x-12$
24. $x^2+5x+4,\ x^2-5x-6,\ x^2+10x+9$
25. $2x^2-x-1,\ 2x^2+7x+3,\ 2x^2-9x-5$
26. $x^2-x-20,\ x^2-9x+20$
27. $x^2+2x-15,\ 3x^2-13x+12$
28. $x^2+x-2,\ x^2-x-6$
29. $x^2-4,\ x^2+3x+2$
30. $a^3+8,\ a^2+5a+6$
31. $8x^3+27,\ 4x^2-9,\ 2x^2+5x+3$
32. $2x^2+9x+4,\ 2x^2+11x+5,\ 2x^2-3x-2$
33. $4x^3+12x^2+9x,\ 4x^2-2x-12$
34. $a^2-ab-2b^2,\ a^3-a^2b-4ab^2+4b^3$
35. $x^2+3x-10,\ x^3-x^2-14x+24$
36. $x^3+3x^2-9x+5,\ x^3-19x+30$
37. $x^2+3x-10,\ x^3-x^2-14x+24$ (S.S. 58S)
38. $x^4-13x^2+36,\ 3x^3+13x^2+8x-12$

और $4x^3+17x^2+9x-18$

39. $2x^2+5x-3,\ 2x^3+3x^2-32x+15$
40. $2x^3-7x^2+x+6,\ 3x^3-11x^2+2x+12$ (61S)

II. ऐसे संयुक्त व्यंजकों का म० स० निकालना जिनका गुणनखण्ड करना कठिन हो—

जब दो राशियों के गुणनखंड हमें आसानी से नहीं मिलते तब उनके म० स० निकालने के लिए हमें अंकगणित के 'लम्बे भाग' के नियम का सहारा लेना

पड़ता है। इस नियम का प्रयोग करते समय हमें निम्नलिखित सिद्धांतों को ध्यान में रखना चाहिए।

(i) यदि d, a का गुणनखंड हो, तो यह ma का भी गुणनखंड होगा।

मान लो कि d से a को बाँटने से k भागफल मिलता है। तब

$a = kd$ और $ma = mkd$

इससे स्पष्ट है कि d, ma का भी गुणनखंड होगा।

(ii) यदि d, a और b दोनों का सामान्य गुणनखंड हो, तो वह $ma \pm nb$ का भी गुणनखंड होगा।

मान लो कि d से a को बाँटने से k भागफल मिलता है और b को बाँटने से l भागफल मिलता है। तब $a = kd$ और $b = ld$

$$\therefore \quad ma \pm nb = mkd \pm nld$$
$$= (mk \pm nl)d$$

$\therefore$ d, $m \pm nb$ का भी गुणनखंड होगा।

उप-सूत्र—ऊपर के सिद्धान्त के अनुसार यदि d, a और b का म० स० हो तो वह ma±ab का भी म० स० होगा।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. म० स० निकालो—

(i) $x^3 + x^2 - 2$ और $x^3 + 2x^2 - 3$ (H.S. 61S)

(ii) $6x - 7 + x^2$ और $6x - 7 + 8x^2 + x^3$ (H.S. 60A)

(iii) $3x^3 - 7x^2 - 18x - 8$ और $2x^3 - 3x^2 - 17x - 12$ (56S, S.S. 68A)

(i)
$$
\begin{array}{r|l|l}
x^3 + x^2 - 2 & x^3 + 2x^2 - 2 & 1 \\
& x^3 + x^2 - 2 & \\
& - \quad - \quad + & \\
\hline
& x^2 - 1 &
\end{array}
$$

$x^2 - 1 \,)\, x^3 + x^2 - 2 \,(\, x + 1$

$x^3 - x$

$- \quad +$

$x^2 + x - 2$

$x^2 \quad - 1$

$- \quad +$

$x - 1 \,)\, x^2 - 1 \,(\, x + 1$

$x^2 - x$

$- \quad +$

$x - 1$

$x - 1$

$- \quad +$

$\therefore$ इष्ट म० स० $= x - 1$

(ii) $x^3 + 6x - 7 \,)\, x^3 + 8x^2 + 6x - 7 \,(\, x - 2$

$x^3 + 6x^2 - 7x$

$- \quad - \quad +$

$2x^2 + 13x - 7$

$2x^2 + 12x - 14$

$- \quad - \quad +$

$x - 7 \,)\, x^2 + 6x - 7 \,(\, x - 1$

$x^2 + 7x$

$- \quad -$

$-x - 7$

$-x - 7$

$+ \quad +$

$\therefore$ इष्ट म० स० $= x + 7$

(iii) $2x^3 - 3x^2 - 17x - 12 \overline{)\, 3x^3 - 7x^2 - 18x - 8 \,(}\; 3$

$\qquad 2$

$$6x^3 - 14x^2 - 36x - 16$$
$$6x^3 - 9x^2 - 51x - 36$$
$$- \quad + \quad + \quad +$$
$$-5 \,|\, -5x^2 + 15x + 20$$
$$x^2 - 3x - 4$$

$$x^2 - 3x - 4 \,)\, 2x^3 - 3x^2 - 17x - 12 \,(\, 2x + 3$$
$$2x^3 - 6x^2 - 8x$$
$$- \quad + \quad +$$
$$3x^2 - 9x - 12$$
$$3x^2 - 9x - 12$$
$$- \quad + \quad +$$

$\therefore$ इष्ट म० स० $= x^2 - 3x - 4$

उदाहरण 2. $22x^6 - 78x^5 - 16x^2$ और $2x^5 - 78x^2 - 44x$ का म० स० निकालो ।

पहला व्यंजक $= 2x^2(11x^4 - 39x^3 - 8)$

दूसरा व्यंजक $= 2x(x^4 - 39x - 22)$

अत: $2x^2$ और $2x$ का $H.\ C.\ F = 2x$

अब,

$$x^4 - 39x - 22 \,)\, 11x^4 - 39x^3 - 8 \,(\, 11$$
$$11x^4 - 429x - 242$$
$$- \quad + \quad +$$
$$-39 \,|\, -39x^3 + 429x + 234$$
$$x^3 - 11x - 6 \,)\, x^4 - 39x - 22 \,(\, x$$
$$x^4 - 6x - 11x^2$$
$$- \quad + \quad +$$
$$11 \,|\, 11x^2 - 33x - 22$$
$$x^2 - 3x - 2$$

$$x^2 - 3x - 2 \,)\, x^3 - 11x - 6 \,(\, x + 3$$
$$x^3 - 2x - 3x^2$$
$$- \quad + \quad +$$
$$3x^2 - 9x - 6$$
$$3x^2 - 9x - 6$$
$$- \quad + \quad +$$

अत: अभीष्ट म० स० $= 2x(x^2 - 3x - 2)$

उदाहरण 3. $x^5 - x^3 + 8$ और $x^5 - x^2 + 4$ का म० स० निकालो।

$$x^5 - x^2 + 4 \,)\, x^5 - x^3 + 8 \,(\, 1$$
$$x^5 - x^2 - 4$$
$$- \quad + \quad -$$
$$-1 \,|\, -x^3 + x^2 + 4$$
$$x^3 - x^2 - 4 \,)\, x^5 - x^2 + 4 \,(\, x^2 + x + 1$$
$$x^5 - 4x^2 - x^4$$
$$- \quad + \quad +$$
$$x^4 + 3x^2 + 4$$
$$x^4 - x^3 - 4x$$
$$- \quad + \quad +$$
$$x^3 + 3x^2 + 4x + 4$$
$$x^3 - x^2 - 4$$
$$- \quad + \quad +$$
$$4 \,|\, 4x^2 + 4x + 8$$
$$x^2 + x + 2 \,)\, x^3 - x^2 - 4 \,(\, x - 2$$
$$x^3 + x^2 + 2x$$
$$- \quad - \quad -$$
$$-2x^2 - 2x - 4$$
$$-2x^2 - 2x - 4$$

$\therefore$ म० स० $= x^2 + x + 2$ उत्तर।

उदाहरण 4. $3x^5 - 5x^3 + 2$ और $4x^5 - 10x^2 + 6$ का म० स० निकालो।

$$3x^5 - 5x^3 + 2 \,\big)\, 4x^5 - 10 + 6 \,\big(\, 4$$

$$\times 3$$

$$12x^5 - 30x^2 + 18$$

$$12x^5 - 20x^3 + 8$$

$$- \quad + \quad -$$

$$10 \,|\, 20x^3 - 30x^2 + 10$$

$$2x^3 - 3x^2 + 1 \,\big)\, 3x^5 - 5x^3 + 2 \,\big(\, 3x^2 + 9x + 7$$

$$\times 2$$

$$6x^5 - 10x^3 + 4$$

$$6x^5 - 9x^4 + 3x^2$$

$$- \quad + \quad -$$

$$9x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 4$$

$$\times 2$$

$$18x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 8$$

$$18x^4 - 27x^3 \qquad + 9x$$

$$- \quad + \quad -$$

$$7x^3 - 6x^2 - 9x + 8$$

$$\times 2$$

$$14x^3 - 12x^2 - 18x + 16$$

$$14x^3 - 21x^2 \qquad + 7$$

$$- \quad + \quad -$$

$$9 \,|\, 9x^2 - 18x + 9$$

$$x^2 - 2x + 1 \,\big)\, 2x^3 - 3x^2 + 1 \,\big(\, 2x + 1$$

$$2x^3 - 4x^2 + 2x$$

$$- \quad + \quad -$$

$$x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 2x + 1$$

$$- \quad + \quad -$$

$\therefore$ म० स० $= x^2 - 2x + 1$ उत्तर।

EXAMPLE 42

महत्तम समापवर्त्तक निकालो—

1. $x^3-x^2-8x+12,\ 3x^2-2x-8$ (P.U. 27)
2. $3x^4+7x^3-2x^2+x+1,\ x^4+x^3-2x^2+7x+3$
3. $3x^5-5x^3+2,\ 2x^5-5x^2+3$
4. $x^3-4x^2+9x-10,\ x^3+2x^2-3x+20$ और $x^3+5x^2-9x+35$
5. $x^2+3x-10,\ x^3-x^2-14x+24$ (58S)
6. $x^2+x-2,\ x^3+x^2-14x-24$
7. $2x^3-x-1,\ 3x^3-7x^2+4$ (62A)
8. $3x^2-2x-8,\ x^3-x^2-8x+12$ (P.U. 27)
9. $3x^2-11x-4,\ 6x^3-25x^2+3$
10. $3x^5-5x^3+2,\ 2x^5-5x^2+3$
11. $x^3-x^2-5x+2,\ x^3+4x^2+x-6$ (55S)
12. $4x^2-5x+1,\ 6x^3-6x^2+2x-2$ (H. S. 63S)
13. $6x^4+7x^3+5x^2+2x,\ 4x^5-18x^4-8x^3-10x^2$ (P.U. 30, H.S. 64A)
14. $3x^4+7x^3-14x^2-24x,\ 6x^4-10x^3-24x^2$ (P.U. 41S)
15. $4x^3-12x-8,\ 6x^3-24x^2+30x-12$ (P.U. 33A)
16. $8x^3-24x^2+16,\ 2x^4-50x^2+120x-72$ (P.U. 34)
17. $4x^4-14x^3+20x^2-16,\ 16x^6-28x^5-12x^4+16x^3-16x^2$ (P. U. 38, 50A)
18. $x^3+4x^2+4x+3,\ x^3+8x^2+21x+18$ (P.U. 46A, 54S,) (61S, 64S)
19. $x^3-3x^2-4x+12,\ x^3-7x^2+16x-12$ (57A)
20. $x^3-x^2-5x+2,\ x^3+4x^2+x-6$
21. $x^3-x^2-4x+4,\ x^3-2x^2-x+2$

22. $x^3+x^2-4x-4,\ x^3+2x^2-x-2$

23. $x^3-2x^2-x+2,\ x^3+2x^2-x-2$

24. $x^3-7x-6,\ x^3+6x^2+11x+6$

25. $x^3-3x+2,\ 2x^3+4x^2+6x-12$

26. $x^3+3x^2+3x+1,\ x^3+5x^2+8x+4$

27. $2x^3-7x^2+x+6,\ 3x^3-11x^2+2x+12$ (61A)

28. $2x^3+5x^2+5x+3,\ 3x^3+5x^2+5x+2$ (65A)

29. $2x^3+5x^2+5x-4,\ 4x^3+13x^2+19x+4$

30. $3a^3+15a^2b-17ab^2-6b^3,\ 6a^3+3a^2b-5ab^2+b^3$

31. $x^3-x^2-2x+2,\ x^4-3x^3+2x^2+x-1$

(P.U. 24, H.S. 62A)

32. $2x^3-3x^2-8x-3,\ x^4-2x^3-2x^2-2x-3$

33. $x^3-7x+6,\ x^4-3x^3-2x^2+12x-8$ (P.U. 28)

34 $x^3+5x^2+7x+3,\ x^4+3x^3+4x^2+3x+1$ (P.U. 18)

35. $3x^3-5x^2+5x-2,\ 2x^4-2x^3+3x^2-x+1$

(P.U. 30. 55A)

36. $x^3-11x-10,\ x^4-5x^2+4$ (P. U. 37)

37. $x^4+3x+20,\ 5x^4-3x^3+64$ (59)

38. $x^4-x^3-6x^2+5x-1,\ x^4+5x^3+10x^2+7x-5$

39. $2x^4-3x^3-3x^2+4,\ 2x^4-x^3-9x^2+4x+4$ (P.U. 26)

40. $4a^4+32a^3-72a^2+4a+8,\ 6a^4+54a^3+138a^2+78a+12$

(H.S. 65A)

41. $x^4-5x^2+4,\ x^5-11x+10$ (P.U. 37)

42. $2x^3+x^2-5x-3,\ 8x^3+6x^2-21x-18$

43. $3x^3-5x^2+5x-2,\ 2x^4-2x^3+3x^2-x+1$

44. $2x^2+9xa+9a^2,\ 2x^3+9x^2a+xa^2-12a^2$

45. $x^3-19x+30,\ x^3+3x^2-9x+5$

46. $22x^6 - 78x^5 - 16x^2,\ 2x^5 - 78x^2 - 44x$

47. $3x^3 + 2x^2 - 11x + 4,\ 3x^3 + 14x^2 + 13x - 8$

48. $6a^3 - 11a^2 - 3a + 2,\ 3a^3 + 20a^2 + 23a - 10$

49. $75x^3 - 35x^2 + 24x + 4,\ 85x^3 - 36x^2 + 25x + 6$

50. $12x^4 - 30x^2 + 126x + 90,\ 15x^4 - 25x^3 + 145x - 75$

—::o::—

बारह

लघुत्तम समापवर्त्य

(Lowest Common Multiple)

51. 3 को 7 से गुणा करने से 21 गुणनफल होता है अर्थात् यदि हम 21 को 3 या 7 से भाग दें, तो पूरा-पूरा भाग लग जायगा, तो हम 21 को 3 अथवा 7 का अपवर्त्य (*Multiple*) कहते हैं, इसी प्रकार xy भी x अथवा y का अपवर्त्य कहा जाता है। क्योंकि xy में x अथवा y का निःशेष भाग लग जाता है।

फिर x^2, x^3, x^4, x^5, इत्यादि में भी x का निःशेष भाग लग जाता है, इसलिए ये सब x के अपवर्त्य हैं अर्थात् यदि किसी एक पद का भाग किसी दूसरे भिन्न-भिन्न पदों, में पूरा-पूरा लग जाता हो अर्थात् जब एक पद का भाग दूसरे पद में निःशेष जाता हो तब ये सब पहले पद के अपवर्त्य कहलाते हैं।

यदि दो या अधिक पदों में से प्रत्येक का भाग अनेक पदों में लग जाय, तो ये सब पद दो या अधिक पदों के समापवर्त्य कहलाते हैं। जैसे xy, $4xy$, $5x^2y$, $7xy^2$ आदि x और y प्रत्येक का निःशेष भाग लग जाता है। अतएव ये सब x और y के समापवर्त्य हैं।

इन सब अनेक समापवर्त्यों में से सबसे छोटा समापवर्त्य लघुत्तम समापवर्त्य कहलाता है। इसे संक्षेप में ल० स० से भी प्रकाशित करते हैं। जैसे xy, $4xy$, $5x^2y$, $7xy^2$, सब के सब x और y के समापवर्त्य हैं, परन्तु इसमें xy सबसे छोटा है, इसलिए यह ल० स० (*L. C. M.*) कहलाता है।

अतएव दो या दो से अधिक राशियों का ल० स० वह राशि है जिससे उन सबों का पूरा-पूरा भाग लग जाय और जिसका मान उन राशियों के सभी समापवर्त्यों के मान से कम हो।

52. लघुत्तम समापवर्त्य निकालने का तरीका—

I. जब राशियों का गुणनखंड निकालना आसान हो—

सभी राशियों का गुणनखंड निकाल लो। पहले, पहली राशि के गुणनखंडों को लिख जाओ और फिर दूसरी, तीसरी राशि में उन्हीं गुणनखंडों को लो जो पहले नहीं लिये गये हों। लेकिन याद रहे कि सामान्य गुणनखंडों में से केवल सबसे अधिक घात को ही लिया जाय। तब सबों को गुणा कर दो। वही गुणनफल उन राशियों का ल० स० (*L. C. M.*) होगा।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. ल० स० निकालो—

(i) x^3+2x^2-x-2 और x^3+x^2-4x-4

(ii) $6x^2-x-1$, $3x^2+7x+2$ और $2x^2+3x-2$ (H.S. 60S, 64S)

(iii) $a^2-b^2-c^2+2bc$, $(a+b-c)^2$ और $a^2+c^2-b^2-2bc$ (H.S. 62S)

(iv) x^2-3x+2, x^2-4x+3 और x^2-5x+6 (H.S. 61A)

(i) $x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-1(x+2)$

$=(x+2)(x^2-1)$

$=(x+2)(x+1)(x-1)$

$x^3+x^2-4x-4=x^2(x+1)-4(x+1)$

$=(x+1)(x^2-4)$

$=(x+1)(x+2)(x-2)$

$\therefore$ इष्ट ल० स० $=(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$

(ii) प्रथम व्यंजक $= 6x^2 - x - 1$

$= 6x^2 - 3x + 2x + 1$

$= 3x(2x - 1) + 1(2x - 1)$

$= (2x - 1)(3x + 1)$

दूसरा व्यंजक $= 3x^2 + 7x + 2$

$= 3x^2 + 6x + x + 2$

$= 3x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(3x + 1)$

तीसरा व्यंजक $= 2x^2 + 3x - 2$

$= 2x^2 + 4x - x - 2$

$= 2x(x + 2) - 1(x + 2)$

$= (2x - 1)(x + 2)$

$\therefore$ इष्ट ल० स० $= (x + 2)(2x - 1)(3x + 1)$

(iii) प्रथम व्यंजक $= a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$

$= a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$

$= a^2 - (b -)c^2$

$= (a + b - c)(a - b + c)$

दूसरा व्यंजक $= (a + b - c)^2$

$= (a + b - c)(a + b - c)$

तीसरा व्यंजक $= a^2 + c^2 - b^2 - 2ac$

$= a^2 - 2ac + c^2 - b^2$

$= (a - c)^2 - b^2$

$= (a + b - c)(a - b - c)$

$\therefore$ इष्ट ल० स० $= (a + b - c)(a - b + c)(a - b - c)(a - b + c)$

(iv) प्रथम व्यंजक $= x^2 - 3x + 2$

$= x^2 - 2x - x + 2$

$$= x(x-2) - 1(x-2)$$
$$= (x-1)(x-2)$$

दूसरा व्यंजक $= x^2 - 4x + 3$
$$= x^2 - 3x - x + 3$$
$$= x(x-3) - 1(x-3)$$
$$= (x-1)(x-3)$$

तीसरा व्यंजक $= x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6$
$$= x(x-3) - 3(x-3)$$
$$= (x-3)(x-2)$$

$\therefore$ इष्ट ल० स० $= (x-1)(x-2)(x-3)$

उदाहरण 2. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ और $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ का ल० स० निकालो। (56A)

पहला व्यंजक $= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
$$= (x)^3 - 3x^2(1) + 3x(1)^2 - (1)^3 = (x-1)^3$$

दूसरा व्यंजक $= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$
$$= x^3(x-1) - x^2(x-1) + x(x-1) - 1(x-1)$$
$$= (x-1)(x^3 - x^2 + x - 1)$$
$$= (x-1)\{x^2(x-1) + 1(x-1)\}$$
$$= (x-1)^2)(x^2+1)$$

$\therefore$ ल० स० $= (x-1)^3(x^2+1)$

उदाहरण 3. $x^3 - x^2 - 5x + 2$ और $x^3 + 4x^2 + x - 6$ का ल० स० निकालो। (55S)

पहला व्यंजक $= x^3 - x^2 - 5x + 2$
$$= x^2(x+2) - 3x(x+2) + (x+2)$$
$$= (x+2)(x^2 - 3x + 1)$$

दूसरा व्यंजक $= x^3 + 4x^2 + x - 6$

$= x^2(x-1) + 5x(x-1) + 6(x-1)$

$= (x-1)(x^2+5x+6)$

$= (x-1)(x+2)(x+3)$

$\therefore$ ल० स० $= (x-1)(x+2)(x+3)(x^3-3x+1)$

उदाहरण 4. $6x^2 - 5x - 6$, $16x^4 + 36x^2 + 81$, $8x^3 - 27$ का ल० स० निकालो। (59A)

पहला व्यंजक $= 6x^2 - 5x - 6$

$= 6x^2 - 9x + 4x - 6$

$= 3x(2x-3) + 2(2x-3)$

$= (2x-3)(3x+2)$

दूसरा व्यंजक $= 16x^4 + 36x^2 + 81$

$= (4x^2)^2 + 2.\ 4x^2.\ 9 + 9^2 - 36x^2$

$= (4x^2+9)^2 - (6x)^2$

$= (4x^2+6x+9)(4x^2-6x+9)$

तीसरा व्यंजक $= 8x^3 - 27$

$= (2x)^3 - (3)^3$

$= (2x-3)(4x^2+6x+9)$

$\therefore$ ल० स० $= (2x-3)(3x+2)(4x^2+6x+9)(4x^2-6x+9)$

उदाहरण 5. $6x^2 - x - 1$, $3x^2 + 7x + 2$ और $2x^2 + 3x - 2$ का ल० स० निकालो। (60S, H.S. 60S)

पहला व्यंजक $= 6x^2 - x - 1 = 6x^2 - 3x + 2x - 1$

$= 3x(2x-1) + 1(2x-1)$

$= (2x-1)(3x+1)$

दूसरा व्यंजक $= 3x^2 + 7x + 2 = 3x^2 + 6x + x + 2$

$= 2x(x+2) + 1(x+2)$

$= (x+2)(3x+1)$

तीसरा व्यंजक $= 2x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 4x - x - 2$
$= 2x(x+2) - 1(x+2)$
$= (2x-1)(x+2)$
अतः ल० स० $= (2x-1)(3x+1)(x+2)$,

EXAMPLE 43

ल० स० निकालो—

1. $x^2(x+y),\ xy^2(x^2-y^2)$
2. $x^3,\ (x+y)$
3. $a(a+b),\ a^2-b^2$
4. $(a+b)^2,\ a^2-b^2$
5. $(a+b)^3,\ a^3+b^3$
6. $a^2b+ab^2,\ a^3b^2+a^2b^3$
7. $ab,\ bc,\ ca,$
8. $a+b,\ a^2-ab+b^2,\ a^3+b^3$
9. $1+x,\ 1-x^2, 1-2x-x^2$
10. $a+b,\ a-b$ और a^2-b^2
11. $a^3-b^3,\ a^2(a^2-b^2),\ ab(a-b)^2$
12. $a(b-c),\ b(c-a),\ c(a-b)$
13. $ab(b-c),\ bc(c-a),\ ca(a-b)$
14. $(a-b)(b-c),\ (b-c)(c-a),\ a^2+ab+ac$
15. $a^2-b^2-c^2-2bc,\ b^2-c^2-a^2-2ca,\ c^2-a^2-b^2-2ab$
16. $a^2+ab+bc+ca,\ b^2+ab+bc+ca,\ c^2+ab+bc+ca$ (H.S. 62)
17. $a^2-b^2,\ a^3-b^3,\ a^3-a^2b-ab^2+b^3$
18. $a^2-1,\ a^3+1,\ a^6-1$
19. $x^2+3x+2,\ x^2+5x+6$
20. $x^2+5x+6,\ x^2+8x+15$
21. $x^2-4x+3,\ x^2-5x+6$
22. $x^2-5x+4,\ x^2-6x+8$
23. $x^2-3x-4,\ x^2-x-12$
24. $x^2-3x+2,\ x^2-4x+3,\ x^2-5x+6$ (H. S. 61A)
25. $x^2-1,\ x^2+3x+2,\ x^2+x-2$
26. $x^2+x-6,\ x^2+2x-3,\ x^2-3x+2$
27. $x^2-5x+6,\ x^2-4x+3,\ x^2-3x+2$ (64A)

28. $6(x^2-4x+4)$, $8(x^2+x-6)$, $2x^4-16x$ (P.U. 45)

29. $2x^2-3x-2$, x^2-5x+6, $2x^2-5x-3$ (P.U. 18)

30. $2x^2+3x+1$, $2x^2-x-1$, x^2-1 (57S)

31. $3x^2-10x-8$, $4x^2-20x+9$, $6x^2+x-2$ (54A)

32. $2x^2+3x-2$, $3x^2+7x+2$, $6x^2-x-1$ (60S, H.S. 65S)

33. $x^2-7x+12$, $3x^2-6x-9$, $2x^3-6x^2-8x$ (P.U. 30A)

34. x^2+x-2, x^2-x-6, x^3-x^2+x-1 (P.U. 30S)

35. $8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$, $6x^2-5x-6$

(P.U. 28 59A, 62S)

36. $6x^2-11x+3$, $4x^2-4x-3$, $6x^2+25x-9$ (65S)

37. $3xy-6y^2$, $12x^2-18xy^2$, $6x^3-6x^2y-12xy^2$ (P.U. 47)

38. $x^2-3xy-10y^2$, $x^2+2xy-35y^2$, $x^2-8xy+15y^2$

(P.U. 38)

39. $x^2-4ax+4a^2$, $x(x-y)-2a(2a-y)$, $x^2-y^2+4ay-4a^2$

(P.U. 32)

40. $16x^3+54, 16x^4+36x^2+81$ और $8x^3-24x^2+36x-27$

(P.U. 35)

41. x^3+2x^2-x-2, x^3+x^2-4x-4

42. x^4-3x^2+2, x^4-5x^2+6, x^4-7x^2+12

43. $8x^3+27$, $6x^2+5x-6$, $4x^4+36x^2+81$

44. a^2-4b^2, a^3+8b^3, $a^4+4a^2b^2+16b^4$

45. x^2-3x+2, x^3+2x^2-3x, $x^4+x^3-6x^2$

46. x^3-3x^2+3x-1, x^3-x^2-x+1, x^4-2x^3+2x-1,
$x^4-2x^3+2x^2-2x+1$

47. $12(x^2+3x-10)$, $16(x^2+4x-12)$

48. $x^2+2x-15$, $x^2+9x+20$, $x^2+4x-21$

49. $2x^2+6x+9$, $4x^3-12x^2+18x$, $4x^4+81$

50. $8x^3-12x^2+6x-1$, $8x^3-4x^2-2x+1$, $2x^2+5x-3$

II. दो संयुक्त व्यंजकों का ल० स० निकालना जिनके खण्ड करना कठिन हो—

इस स्थिति में ल० स० निकालने के लिए निम्नलिखित सिद्धान्त का सहारा लेना चाहिए—

दो राशियों का गुणनफल उनके म० स० और ल० स० के गुणनफल के बराबर होता है।

मान लो कि A और B दो राशियाँ है जिनके ल० स० एवं म० स० क्रमशः L और M हैं तो सिद्ध करना है कि—

$$A \times B = L \times M$$

A और B को M से भाग दो और मान लो कि भागफल क्रमशः m और n है। चूँकि M, A और B का म० स० है, इसलिए m और n में कोई सामान्य गुणनखण्ड नहीं हो सकता है,

$\therefore$ $A = mM$ और $B = nM$

अब $L = A$ और B का ल० स०

$= mM$ और nM का ल० स०

$= mnM$ [$\because$ m और n में कोई सामान्य गुणखण्ड नहीं है]

फिर $A \times B = mM \times nM$

$= M \times mnM$

$= M \times L$

$$\therefore \quad L = \frac{A \times B}{M}$$

अतः दी हुई राशियों को गुणा करो। गुणनफल को इन दोनों राशियों के म० स० से भाग दो। जो भागफल होगा वह दोनों राशियों का ल० स० होगा।

नोट—जब तीन या तीन से अधिक संख्याओं का ल० स० निकालना हो, तो पहले उनमें से किसी दो का ल० स० ऊपर दिये गये तरीके से निकालो

और फिर इस फल और तीसरे व्यंजक का ल० स० निकालो। अन्त में जो फल निकलेगा वही इष्ट ल० स० होगा।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. लघुत्तम समापवर्त्य निकालो—

(i) $x^3+2x^2-x-2,\ x^3+x^2-4x-4$ (P.U. 40)

(ii) $x^3+6x^2+11x+6,\ x^3+8x^2+19x+12$

(i) प्रथम व्यंजक $= x^3+2x^2-x-2$

$$= x^2(x+2)-1(x+2)$$

$$= (x^2-1)(x+2) = (x+1)(x-1)(x+2)$$

दूसरा व्यंजक $= x^3+x^2-4x-4$

$$= x^2(x+1)-4(x+1)$$

$$= (x^2-4)(x+1) = (x+1)(x+2)(x-2)$$

$\therefore$ दोनों राशियों का म० स० $= (x+1)(x+2)$

$\therefore$ ल० स० $=$ $\dfrac{\text{दोनों संख्याओं का गुणनफल}}{\text{म० स०}}$

$$= \frac{(x+1)(x-1)(x+2)(x+1)(1+2)(x-2)}{(x+1)(x+2)}$$

$$= (x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$$

(ii)

$$x^3+6x^2+11x+6)\ x^3+8x^2+19x+12\ (1$$
$$x^3+6x^2+11x+6$$
$$-\quad -\quad -\quad -$$
$$2\,|\ 2x^2+8x+6$$
$$x^2+4x+3)\ x^3+6x^2+11x+6\ (x+2$$
$$x^3+4x^2+3x$$
$$-\quad -\quad -$$
$$2x^2+8x+6$$
$$2x^2+8x+6$$
$$-\quad -\quad -$$

$\therefore$ दिये हुए व्यंजकों का म० स० $= x^2+4x+3$

∴ दिये हुए व्यंजकों का ल० स०

$$=\frac{(x^3+6x^2+11x+6)\times(x^3+8x^2+19x+12)}{x^2+4x+3}$$

$$=(x+2)(x^3+8x^2+19x+12)$$

$$=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$$

उदाहरण 2. ल० स० निकालो—

x^2+3x+2, x^2+4x+3 और x^2+5x+6.

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ .... (i)

$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ .... (ii)

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ .... (iii)

(i) और (ii) का ल० स० $=(x+1)(x+2)(x+3)$ .... (iv)

(iv) और (iii) का ल० स० $=(x+1)(x+2)(x+3)$

उदाहरण 3. $2x^3+x^2-5x-3$ और $8x^3+6x^2-21x-18$ का ल० स० निकालो—

$$2x^3+x^2-5x-3)\ 8x^3+6x^2-21x-18\ (4$$
$$8x^3+4x^2-20x-12$$
$$-\quad -\quad +\quad +$$
$$2x^2-x-6)\ 2x^3+x^2-5x-3\ (x+1$$
$$2x^3-x^2-6x$$
$$-\quad +\quad +$$
$$2x^2+x-3$$
$$2x^2-x-6$$
$$-\quad +\quad +$$
$$2x+3)\ 2x^2-x-6\ (x-2$$
$$2x^2+3x$$
$$-\quad -$$
$$-4x-6$$
$$-4x-6$$
$$+\quad +$$

∴ म० स० $2x+3$

लेकिन हम जानते हैं कि

पहला व्यंजक × दूसरा व्यंजक = ल० स० × म० स०

$$\therefore \text{ ल० स०} = \frac{(2x^3 + x^2 - 5x - 3) \times (8x^3 + 6x^2 - 21x - 18)}{2x+3}$$

$$= (x^2 - x - 1)(8x^3 + 6x^2 - 21x - 18)$$

उदाहरण 4. $6x - 7 + x^2$ और $6x - 7 + 8x^2 + x^3$ का ल० स० निकालो।

$$x^2 + 6x - 7 \,)\, x^3 + 8x^2 + 6x - 7 \,(\, x + 2$$
$$x^3 + 6x^2 - 7x$$
$$- \quad - \quad +$$
$$2x^2 + 13x - 7$$
$$2x^2 + 12x - 14$$
$$- \quad - \quad +$$
$$x + 7 \,)\, x^2 + 6x - 7 \,(\, x - 1$$
$$x^2 + 7x$$
$$- \quad -$$
$$-x - 7$$
$$-x - 7$$
$$+ \quad +$$

$$\therefore \text{ म० स०} = x + 7$$

$$\therefore \text{ ल० स०} = \frac{(x^2 + 6x - 7) \times (x^3 + 8x^2 + 6x - 7)}{x+7}$$

$$= (x - 1)(x^3 + 8x^2 + 6x - 7)$$

EXAMPLE 44

ल० स० निकालो—

1. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6, \; x^3 + 8x^2 + 19x + 12$
2. $x^3 - 4x^2 + 9x - 10, \; x^3 + 5x^2 - 9x + 35$
3. $x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 3, \; x^4 + 2x^3 + x^4 + 2x + 3$

4. $x^3+2x^2-2x-3,\ x^3+3x^2-x-6$
5. $x^3+x^2-9x-9,\ x^3+2x^2-5x-6$
6. $x^3-x^2-5x+2,\ x^3+4x^2+x-6$ (P.U. 29, 55S)
7. $x^3+x^2-5x-2,\ x^3-x^2-11x-4$
8. $x^3-4x^2+5x-2,\ 2x^3-4x^2+3x-1$
9. $3x^3+2x^2-11x+4,\ 3x^3+14x^2+13x-8$
10. $3x^3-x^2-x-4,\ 4x^3+2x^2+2x-2$
11. $6x^3+7x^2-9x+2,\ 8x^4+6x^3-15x^2+9x-2$
12. $x^3-2x+1,\ x^3+2x^2-1$
13. $6x^3-11x^2+5x-3,\ 9x^3-9x^2+5x-2$
14. $3x^3+x^2-8x+4,\ 3x^3+7x^2-4$ (P.U. 25)
15. $x^3+x^2y+xy^2+y^3,\ x^3-x^2y+xy^2-y^3$
16. $x^3-3x^2+3x-1,\ x^4-2x^3+2x^2-2x+1$ (56A)
17. $x^3+2x^2-x-2;\ 2x^4-x^3-9x^2+4x+4$ (P. U. 26)
18. $6x^3+7x^2-9x+2,\ 8x^4+6x^3-15x^2+9x-2$
19. $x^4-x^2+6x-9,\ x^4+2x^3-5x^2-6x+9$
20. $x^4+7x^3+14x^2+7x+1,\ x^4-6x^2+3x+2$
21. $x^4+x^2+1,\ x^4-x^3-x+1$
22. दो राशियों का गुणनफल $3x^6+13x^5-32x^3+208x-192$ है और उनका म० स० x^2+3x-4 है, तो उनका ल० स० निकालो।
23. दो राशियों का ल० स० x^4-x^3+x-1 और उनका म० स० x^2-x+1 है। यदि एक राशि x^3-2x^2+2x-1 हो, तो दूसरी राशि क्या होगी ?
24. दो संख्याओं x और y का म० स० और ल० स० M और L है और यदि $M+L=x+y$ हो, तो सिद्ध करो कि $M^3+L^3=x^3+y^3$
25. दो व्यंजकों का ल० स० और म० स० क्रमशः a^6-b^6 और a^2-b^2 है, तो दोनों व्यंजक कौन से हैं ?

49
501

26. सबसे छोटी ऐसी कौन सी राशि होगी, जिससे $x^3 - 7x + 6$ को गुणा करने से गुणनफल में $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ का पूरा-पूरा भाग लग जाय।

27. $3x^2 - 10x - 8,\ 4x^2 - 20x + 9,\ 6x^2 + x - 2$

28. $6(x^2 - 4x + 4),\ 8(x^2 + x - 6),\ 2x^4 - 16x$

29. $3x^3 - 7x^2 - 18x - 8,\ 2x^3 - 3x^2 - 17x - 12$

30. $6x^3 + 25x^2 + 16x + 7,\ 6x^3 - 11x^2 - 8x - 5$

31. $6x^2 - 11x + 3,\ 4x^2 - 4x - 3,\ 6x^2 + 25x - 9$

32. $9x^4 - 28x^2 + 3,\ 27x^4 - 12x^2 + 1,\ 27x^4 + 6x^2 - 1,$
$x^4 - 6x^2 + 9$

33. $12x^3 - 4x^2 - 25x + 12,\ 12x^3 - 28x^2 + 7x + 12$

34. $8x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 9x - 6,\ 16x^4 - 12x^3 + 20x^2 - 9x + 6$

35. $6x^2 - 19x + 10,\ 12x^2 - 11x + 2,\ 8x^2 + 10x - 3$

36. $x^3 + 2x^2 - 1,\ x^4 - 3x^3 + 3x + 1$

37. $8x^4 - 50x^2y^2,\ 12x^3 + 24x^2y - 15xy^2,\ 16x^2 - 48xy + 20y^2$

38. $4x^2 - 12ax + 9a^2,\ 6x^2 - 7ax - 3a^2,\ 6x^2 - 11ax + 3a^2$

39. $9a^2 - 6ax + x^2,\ 6a^2 + 10ax + 4x^2,\ 9a^2 - 21ax + 6x^2$

40. $x^2 - 6xy + 8y^2,\ x^2 - 7xy + 12y^2,\ x^2 + 2xy - 15y^2,$
$x^2 + xy - 20y^2$

41. $6x^2 - x - 1,\ 3x^2 + 7x + 2,\ 2x^2 + 3x - 2$

42. $1 + 4x + 4x^2 - 16x^4,\ 1 + 2x - 8x^3 - 16x^4$

तेरह

भिन्न

(Fraction)

53. अङ्कगणित की ही तरह बीजगणित में भी जब एक राशि को दूसरी राशि से भाग देने पर जो भागफल निकलता है उसे भिन्न (*Fraction*) कहते हैं। जैसे x में y से भाग देने पर भागफल $x \div y$ एक भिन्न है और इसे $\frac{x}{y}$ द्वारा सूचित किया जाता है। x को भिन्न का अंश (*Numerator*) और y को हर (*Denominator*) कहते हैं। अर्थात् किसी भी भिन्न में क्षैतिज रेखा के ऊपर की राशि अंश और नीचे की राशि हर कही जाती है।

54. भिन्न के मूल नियम—

बीजगणित में भी अङ्कगणित की तरह ही भिन्न के सभी नियम व्यवहार किये जाते हैं।

यदि किसी भिन्न के अंश और हर को एक ही संख्या से भाग दें या गुणा करें, तो भिन्न के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

यदि a, b और m तीन राशियाँ हों, तो सिद्ध करना है कि $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$.

मान लो कि $x=\frac{a}{b}$, तो $x \times b=\frac{a}{b} \times b=a$

$\therefore \quad x \times b \times m=a \times m,$

या, $\quad x \times bm=am$

$$\therefore \ x = \frac{am}{bm}$$

या, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{am}{bm} \quad \left(\because \ x = \dfrac{a}{b}\right)$

उप-सूत्र—$\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \times (-1)}{b \times (-1)} = \dfrac{-a}{-b}$ अतः अंश और हर दोनों का चिन्ह बदलने से भिन्न के मूल्य में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

55. भिन्न को लघुत्तम पदों में लाना (Reduction of a fraction to its lowest terms)—

किसी भिन्न के अंश और हर में यदि कोई गुणनखण्ड साधारण न हो, तो उस भिन्न को 'लघुत्तम पदां का भिन्न' कहते हैं। इसलिए किसी भिन्न को यदि लघुत्तम पदों में बदलना हो, तो एक ऐसा भिन्न निकालना आवश्यक होता है, जो दिये हुए भिन्न के बराबर हो और उसके अंश और हर में कोई साधारण गुणनखंड न हो, इसलिए स्पष्ट है कि दिये हुए भिन्न के अंश और हर के महत्तम समापवर्तक द्वारा दोनों को भाग करने से भिन्न लघुत्तम पदों में प्रकट होता है।

अतएव किसी भी भिन्न को लघुत्तम रूप में लाने के लिए उसके अंश और हर में उसके म० स० से भाग देना चाहिए।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. निम्नलिखित का लघुत्तम रूप में बदलो—

(i) $\dfrac{15a^3b^2c^4}{25a^2b^4c^3}$, (ii) $\dfrac{x^3 - xy^2}{(x-y)^2}$ (iii) $\dfrac{a^2b^3(a^2-b^2)}{3ab^4(a^3+b^3)}$

(i) अंश $= 5 \times 3 \times a^2 \times a \times b^2 \times c^3 \times c$

हर $= 5 \times 5 \times a^2 \times b^2 \times b^2 \times c^3$

$\therefore$ अंश और हर का म० स० $5a^2b^2c^3$

$\therefore$ अंश और हर को $5a^2b^2c^3$ से भाग देने पर,

दिया हुआ भिन्न $= \dfrac{15a^3b^2c^4 \div 5a^2b^2c^3}{25a^2b^4c^3 \div 5a^2b^2c^3} = \dfrac{3ac}{5b^2}$

(ii) अंश $= x^3 - xy^2 = x(x^2 - y^2) = x(x-y)(x+y)$

हर $= (x-y)^2 = (x-y)(x-y)$

$\therefore$ अंश और हर का म० स० $= x - y$

$\therefore$ अंश और हर को $x - y$ से भाग देने पर,

$\therefore$ दिया हुआ भिन्न $= \dfrac{x(x-y)(x+y) \div (x-y)}{(x-y)^2 \div (x-y)} = \dfrac{x(x+y)}{x-y}$

(iii) अंश $= a \times a^2 \times b^3 \times (a+b)(a-b)$

हर $= 3a \times b^3 \times b \times (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$\therefore$ अंश और हर का म० स० $= ab^3(a+b)$

$\therefore$ अंश और हर को $ab^3(a+b)$ से भाग देने पर,

दिया हुआ भिन्न $= \dfrac{ab^3(a+b)a^2(a-b) \div ab^3(a+b)}{ab^3(a+b)\cdot 3b(a^2 - ab + b^2) \div ab^3(a+b)}$

$$= \frac{a^2(a-b)}{3b(a^2 - ab + b^2)}$$

उदाहरण 2. इन्हें सरल करो—

(i) $\dfrac{2x^2 - x - 6}{3x^2 - 2x - 8}$ (ii) $\dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + 2x^2 - 13x + 10}$

(i) अंश $= 2x^2 - x - 6 = 2x^2 - 4x + 3x - 6$

$= 2x(x-2) + 3(x-2)$

$= x - 2)(2x + 3)$

हर $= 3x^2 - 2x - 8 = 3x^2 - 6x + 4x - 8$

$= 3x(x-2) + 4(x-2)$

$= (x-2)(3x+4)$

$\therefore$ अंश और हर का म० स० $= x - 2$

$\therefore$ अंश और हर में $x-2$ से भाग देने पर,

दिया हुआ भिन्न $= \dfrac{2x^2 - x - 6}{3x^2 - 2x - 8}$

$= \dfrac{(x-2)(2x+3) \div (x-2)}{(x-2)(3x+4) \div (x-2)} = \dfrac{2x+3}{3x+4}$

(ii) अंश $= x^3 - 7x + 6 = x^3 - x^2 + x^2 - x - 6x + 6$

$= x^2(x-1) + x(x-1) - 6(x-1)$

$= (x-1)(x^2 + x - 6)$

$= (x-1)(x-2)(x+3)$

हर $= x^3 + 2x^2 - 13x + 10$

$= x^3 - x^2 + 3x^2 - 3x - 10x - 10$

$= x^2(x-1) + 3x(x-1) - 10(x-1)$

$= (x-1)(x^2 + 3x - 10)$

$= (x-1)(x-2)(x+5)$

$\therefore$ अंश और हर का म० स० $= (x-1)(x-2)$

$\therefore$ अंश और हर में $(x-1)(x-2)$ से भाग देने पर,

दिया हुआ भिन्न $= \dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + 2x^2 - 13x + 10}$

$= \dfrac{(x-1)(x-2)(x+3) \div (x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+5) \div (x-1)(x-2)}$

$= \dfrac{x+3}{x+5}$

EXAMPLE 45

लघुत्तम रूप में लाओ—

1. $\frac{2x^2y^3}{4x^2y^4}$ 2. $\frac{6a^2b^3}{8ab^4}$ 3. $\frac{4a^2xy^2}{10ax^2y^2}$

4. $\frac{24a^3b^4c^5}{18a^5b^3c^4}$ 5. $\frac{15x^3y^2z^4}{25x^2y^4z^3}$ 6. $\frac{18a^2bc^4d^3}{27a^3b^2c^4d^4}$

7. $\frac{16x^2a^4y^3z^5}{40a^2z^4x^3y^4}$ 8. $\frac{70a^2b^3c^4d^7}{105c^4d^2a^3b^3}$ 9. $\frac{39m^2n^5p^3q^6}{65p^2m^3n^4q^5}$

10. $\frac{x^2-a^2}{x^2+ax}$ 11. $\frac{x^2-3x}{9x-x^3}$ 12. $\frac{4x^2-9a^2}{4x^2+6ax}$

13. $\frac{x^2+3x-40}{x^2+4x-32}$ 14. $\frac{x^2+2x-15}{x^2+9x+20}$ 15 $\frac{x^2+2x-8}{x^2+x-12}$

16. $\frac{a^2-3ab+4b^2}{a^2-4ab-5b^2}$ 17. $\frac{1-7x+12x^2}{1-8x+15x^2}$

18. $\frac{6x^2-7x-20}{9x^2+6x-8}$ 19. $\frac{6a^2-11ab+4b^2}{8a^2+2ab-3b^2}$

20. $\frac{3x^2-2x-16}{x^3+8}$ 21. $\frac{x^4-x^3y+x^2y^2}{x^3+y^3}$

22. $\frac{27a+a^4}{18a-6a^2+2a^3}$ 23. $\frac{x^4+64a^4}{x^2+4ax+8a^2}$

24. $\frac{3x^3-3x^2y+xy^2-y^3}{4x^2-5xy+y^2}$ 25. $\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2+x-2}$

26. $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-x^2-4x+4}$ 27. $\frac{7-10x-11x^2+6x^3}{14+x+4x^2-3x^3}$

28. $\dfrac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}$ 29. $\dfrac{1 + 3x - x^3 - 3x^4}{1 - x + 2x^2 + x^3 + 3x^4}$

30. $\dfrac{x^4 + x^2 + 25}{x^4 - x^3 + 30x - 25}$

31. $\dfrac{x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 4x^2}{x^5 + x^4 + 8x^2 + 8x}$ (63A)

32. $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^3}$

33. $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc}$

34. $\dfrac{(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}$

35. $\dfrac{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}{a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)}$

36. $\dfrac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)}$

56. भिन्नों का गुणा और भाग—

अङ्कगणित की तरह यदि दो या दो से अधिक भिन्नों का गुणनफल निकालना हो, तो सबों के अंशों को गुणा कर दो और हरों को भी गुणा कर दो। इस तरह एक नया भिन्न मिलेगा जिसका अंश सभी अंशों का गुणनफल होगा। यह नया भिन्न हो उन भिन्नों का गुणनफल होगा। जैसे—

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times e}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{c}{f} = \frac{a \times c \times e}{b \times d \times f} = \frac{ace}{bdf}$$

नोट—सरल करने के लिए अंश और हर के सामान्य पदों को काट (निकाल) देना चाहिए।

भाग के लिए—

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{ad}{bc}$$

नोट—एक राशि को दूसरी राशि द्वारा यदि भाग देना हो, तो पहली राशि को दूसरी राशि के व्युत्क्रम (*Reciprocal*) द्वारा गुणा करना चाहिए।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. सरल करो— (i) $\frac{a^2-1}{a^2+2a} \times \frac{a^2-4}{a^2-3a+2}$

(ii) $\frac{1-x^2}{1+y} \times \frac{1-y^2}{x+x^2} \times \left(1+\frac{x}{1-x}\right)$

(i) दी हुई राशि $= \frac{a^2-1}{a^2+2a} \times \frac{a^2-4}{a^2-3a+2}$

$$= \frac{(a-1)(a+1)}{a(a+2)} \times \frac{(a+2)(a-2)}{(a-2)(a-1)} = \frac{a+1}{a}$$

(ii) दी हुई राशि $= \frac{1-x^2}{1+y} \times \frac{1-y^2}{x+x^2} \times \left(1+\frac{x}{1-x}\right)$

$$= \frac{1-x^2}{1+y} \times \frac{1-y^2}{x(1+x)} \times \frac{1-x+x}{1-x}$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)}{1+y} \cdot \frac{(1-y)(1+y)}{x(1+x)} \times \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1-y}{x}.$$

उदाहरण 2. सरल करो—(i) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \div \frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$

(ii) $\frac{x^2-1}{x^2+x-2} \times \frac{x^3+8}{x^4+4x^2+16} \div \frac{x^2+x}{x^3+2x^2+4x}$

(i) दी हुई राशि $= \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \div \frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$

$$= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a+b)} \times \frac{a-b}{a^2-ab+b^2} = 1$$

(ii) दी हुई राशि $= \frac{x^2-1}{x^2+x-2} \times \frac{x^3+8}{x^4+4x^2+16} \div \frac{x^2+x}{x^3+2x^2+4x}$

$$= \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} \times \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)} \div \frac{x(x+1)}{x(x^2+2x+4)}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} \times \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)} \times \frac{x(x^2+2x+4)}{x(x+1)}$$

$$= 1.$$

EXAMPLE 46

गुणा करो—

1. $\frac{2a^2}{3ab}, \frac{ab^2}{12ac}$ और $\frac{8c^2}{9bc}$

2. $\frac{4a^2b^2}{3c^2}, \frac{9c^2}{16d^2}$ और $\frac{4d^2}{27b^2}$

3. $\frac{x^3}{yz}, \frac{y^3}{zx}$ और $\frac{z^3}{xy}$

4. $\frac{7a^3b^3c^3}{12xyz}, \frac{4x^3y^3z^3}{21a^4b^4c^4}$

सरल करो—

5. $\frac{2x}{x-y} \times (x^2-y^2)$

6. $\frac{x+1}{x-1} \times \frac{x^2+x-2}{x^2+x}$

7. $\frac{a^2-9b^2}{a^2+3ab} \times \frac{3a^2}{a^2-3ab}$

8. $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab} \times \frac{(a+b)^2}{a^2+ab+b^2}$

9. $\dfrac{a^3+8x^3}{a^3-2a^2x}\times\dfrac{a^2-4ax+4x^2}{a^2-2ax+4x^2}$

10. $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}\times\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$

11. $\dfrac{a^2-x^2}{a+b}\times\dfrac{a^2-b^2}{ax+x^2}\times\left(a+\dfrac{ax}{a-x}\right)$

12. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{x}{a}+1\right)\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{x}{a}+1\right)$

13. $\dfrac{b^2-c^2-a^2+2ac}{c^2+a^2-b^2+2ac}\times\dfrac{b^2+c^2-a^2-2bc}{a^2-b^2+c^2-2ac}$

14. $\dfrac{c^2-a^2-b^2+2ab}{b^2-c^2-a^2+2ac}\times\dfrac{a^2-b^2+c^2-2ac}{a^2+b^2-c^2-2ab}$

भाग दो—

15. $\dfrac{4a^2bc}{15xy^2z}\div\dfrac{8ab^2c}{25x^2yz}$

16. $\dfrac{a^2+ab}{a-b}\div\dfrac{ab}{a^2-b^2}$

17. $\dfrac{x^2-49}{x^2-25}\div\dfrac{x+7}{x+5}$

18. $\dfrac{a^4-b^4}{a^2+2ab+b^2}\div\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

19. $\dfrac{m^2-9n^2}{m^2+5mn+6n^2}\div\dfrac{m^2-2mn-3n^2}{m^2-n^2}$

20. $\dfrac{m^3-n^3}{m+n}\div\dfrac{m^2+mn+n^2}{m^2-n^2}$

सरल करो—

21. $\dfrac{x^3+y^3}{(x-y)^2+3xy}\div\dfrac{(x+y)^2-3xy}{x^3-y^3}\times\dfrac{xy}{x^2-y^2}$

22. $\dfrac{a(a-b)^2+4a^2b}{ab+b^2} \div \dfrac{a^2-b^2}{ab} \times \dfrac{b(a+b)^2-4ab^2}{a^2-ab}$

23. $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x-\sqrt{x^2-y^2}} \div \dfrac{\sqrt{x^2-y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}+y}$ (62A)

24. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x} \times \dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x-8} \div \dfrac{x^2-1}{x^2-5x}$

25. $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} \times \dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3} \div \dfrac{a+b}{a-b}$

26. $\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} \times \dfrac{x^3+8}{x^4+4x^2+16} \div \dfrac{x^2+x}{x^3+2x^2+4x}$

27. $\dfrac{x^2-8x-9}{x^2-17x+92} \times \dfrac{x^2-25}{x^2-1} \div \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-9x+8}$

28. $\dfrac{(p+q)^2-r^2}{(p+q+r)^2} \times \dfrac{p^2+pq+pr}{(p-r)^2-q^2} \div \dfrac{p^2-pq+pr}{(p-q)^2-r^2}$

29. $\dfrac{x+3y}{x+y} \times \dfrac{2x^2+3xy-2y^2}{2x^2+7xy-4y^2} \div \dfrac{8y^2+2xy-x^2}{3y^2+2xy-x^2}$.

30. $\dfrac{1+8x^3}{(2-x)^2} \times \dfrac{4x-x^3}{1-4x^2} \div \dfrac{(1-2x)^2+2x}{2-5x+2x^2}$

57. दो या दो से अधिक भिन्नों को सार्व हर बनाना (Reduction of two or more fractions to a common denominator)—

मान लो कि $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{e}{f}$ ..... इत्यादि कई भिन्न हैं, और L उनके हरों (अर्थात् b, d, f... आदि) का ल० स० है। चूंकि किसी भिन्न के अंश और

हर को किसी एक ही राशि से गुणा या भाग करने से भिन्न के मूल्य में कोई अन्तर नहीं होता, इसलिए

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times(L\div b)}{b\times(L\div b)}=\frac{a\times(L\div b)}{L}$$

$$\frac{c}{d}=\frac{c\times(L\div d)}{d\times(L\div d)}=\frac{c\times(L\div d)}{L}$$

$$\frac{e}{f}=\frac{e\times(L\div f)}{f\times(L\div f)}=\frac{c\times(L\div f)}{L}$$ आदि

इसलिए तीसरे स्तम्भ के भिन्न क्रमशः दिये हुए भिन्नों के बराबर हैं और उनमें से प्रत्येक का हर L है। अतः भिन्नों को सार्व हर बनाने के लिए निम्नलिखित नियम प्राप्त होता है—

भिन्नों के हरों का ल० स० निकालकर, उसको प्रत्येक भिन्न के हर द्वारा भाग करने से जो भागफल प्राप्त होते हैं, उनसे दिये हुए प्रत्येक भिन्नों के अंश और हरों को क्रमशः गुणा करो।

उदाहरण 1. $\frac{x}{a+b}$, $\frac{x^2}{a(a-b)}$ और $\frac{x^3}{b(a^2-b^2)}$ को सार्व हर बनाओ।

दिये हुए हरों का ल० स० $=ab(a^2-b^2)$, और इसको प्रत्येक भिन्न के द्वारा भाग करने से क्रमशः $ab(a-b)$, $b(a+b)$ और a भागफल प्राप्त होते हैं।

इसलिए $$\frac{x}{a+b}=\frac{x\times ab(a-b)}{(a+b)\times ab(a-b)}=\frac{xab(a-b)}{ab(a^2-b^2)}$$

$$\frac{x^2}{a(a-b)}=\frac{x^2\times b(a+b)}{a(a-b)\times b(a+b)}=\frac{x^2b(a+b)}{ab(a^2-b^2)}$$

$$\frac{x^3}{b(a^2-b^2)}=\frac{x^3\times a}{b(a^2-b^2)\times a}=\frac{x^3a}{ab(a^2-b^2)}$$

58. भिन्नों का योग और अन्तर—

अंकगणित के नियम के अनुसार ही बीजगणितीय भिन्नों के जोड़-घटाव की क्रिया की जाती है। सर्व प्रथम धारा 57 में बताये गये तरीकों से भिन्नों को समान हर में ले आते हैं तब सब अंशों को जोड़कर योगफल को इस समान हर से भाग दे देने से भिन्नों का योगफल ज्ञात होता है।

नोट—यह याद रखना चाहिए कि बीजगणित में घटाव भी जोड़ का एक रूप होता है।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. सरल करो—

(i) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+4x+3}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}$ (P.U. 31S)

(ii) $\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}-\dfrac{1+x^2}{1-x^2}-\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ (62S)

(iii) $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}-\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{x^2+y^2}{x^3-y^3}$ (P.U. 26A)

(i) $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

अतः हरों का ल० स० $=(x+1)(x+2)(x+3)$

$\therefore$ दी हुई राशि $=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$$=\frac{x+3+x+2+x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{3x+6}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{3(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{3}{(x+1)(x+3)}$$

(ii) दी हुई राशि $=\left(\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}\right)-\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}+\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$$=\frac{(1+x)^2+(1+x)^2}{(1-x)(1+x)}-\frac{(1+x^2)^2+(1-x^2)^2}{(1-x^2)(1+x^2)}$$

$$=\frac{2+2x^2}{1-x^2}-\frac{2+2x^4}{1-x^4}$$

$$=\frac{2(1+x^2)}{1-x^2}-\frac{2(1+x^4)}{1-x^4}$$

$$=2\left[\frac{1+x^2}{1-x^2}-\frac{1+x^4}{(1-x^2)(1+x^2)}\right]$$

$$=2\left[\frac{(1+x^2)^2-1-x^4}{1-x^4}\right]$$

$$=2\left\{\frac{(1+2x)^2+x^4-1-x^4}{1-x^4}\right\}$$

$$=\frac{4x^2}{1-x^4}$$

(iii) दी हुई राशि $=\left(\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{x^2+y^2}{x^3-y^3}\right)+\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}-\dfrac{1}{x+y}\right)$

$$=\left\{\frac{1}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}\right\}$$

$$+\left\{\frac{x^2+y^2}{(x+y)(x^2-xy+y^2}-\frac{1}{x+y}\right\}$$

$$=\left\{\frac{x^2+xy+y^2-x^2-y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}\right\}+\left\{\frac{x^2+y^2-x^2+xy-y^2}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}\right\}$$

$$=\frac{xy}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}+\frac{xy}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}$$

$$=xy\left\{\frac{x^3+y^3+x^3-y^3}{(x^3-y^3)(x^3+y^3)}\right\}=\frac{2x^4y}{x^6-y^6}$$

उदाहरण 2. सरल करो—

$$\frac{\mathbf{a-b}}{\mathbf{(x+a)(x+b)}}+\frac{\mathbf{b-c}}{\mathbf{(x+b)(x+c)}}+\frac{\mathbf{c\quad a}}{\mathbf{(x+c)(x+a)}}$$

हरों का ल० स० $=(x+a)(x+b)(x+c)$

अतः दी हुई राशि $=\dfrac{a-b}{(x+a)(x+b)}+\dfrac{b-c}{(x+b)(x+c)}$

$$+\frac{c-a}{(x+c)(x+a)}$$

$$=\frac{(a-b)(x+c)+(b-c)(x+a)+(c-a)(x+b)}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

$$=\frac{x(a-b)+c(a-b)+x(b-c)+a(b-c)+x(c-a)+b(c-a)}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

$$=\frac{x(a-b+b-c+c-a)+ca-bc+ab-ca+bc-ab}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

$$=\frac{0}{(x+a)(x+b)(x+c)}=0$$

उदाहरण 3. सिद्ध करो—

$$\frac{\mathbf{b+c}}{\mathbf{bc}}(\mathbf{b^2+c^2-a^2})+\frac{\mathbf{c+a}}{\mathbf{ca}}(\mathbf{c^2+a^2-b^2})$$

$$+\frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{ab}}(\mathbf{a^2+b^2-c^2})=\mathbf{2(a+b+c)}$$

माना कि $a^2+b^2+c^2=2s^2$

$\therefore \quad b^2+c^2-a^2=a^2+b^2+c^2-2a^2=2s^2-2a^2$

$$=2(s^2-a^2)$$

$$c^2+a^2-b^2=a^2+b^2+c^2-2b^2=2s^2-2b^2=2(s^2-b^2)$$

और $a^2+b^2-c^2=a^2+b^2-c^2-2c^2=2c^2-2c^2=2(s^2-c^2)$

$\therefore$ दी हुई राशि $=2(s^2-a^2)\cdot\dfrac{b+c}{bc}+2(s^2-b^2)\dfrac{c+a}{ca}$

$$+2(s^2-c^2)\cdot\frac{a+b}{ab}$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(s^2-a^2\right)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\left(s^2-b^2\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(s^2-c^2\right)\right\}$$

$$=2\left\{\frac{1}{a}\left(s^2-b^2+s^2-c^2\right)+\frac{1}{b}\left(s^2-a^2+s^2-c^2\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c}\left(s^2-a^2+s^2-b^2\right)\right\}.$$

$$=2\left\{\frac{1}{a}\left(2s^2-b^2-c^2\right)+\frac{1}{b}\left(2s^2-c^2-a^2\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c}\left(2s^2-a^2-b^2\right)\right\}$$

$$=2\left\{\frac{1}{a}\times a^2+\frac{1}{b}\times b^2\ \frac{1}{c}\times c^2\right\}$$

$$=2\{a+b+c\}=2(a+b+c)$$

EXAMPLE 47

सरल करो—

1. $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{b-a}$

2. $\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a-b}{b}$

3. $\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{x}{x-a}$

4. $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}$

5. $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a-b}{2(a+b)}$

6. $\dfrac{4x^2+9y^2}{4x^2-9y^2}-\dfrac{2x-3y}{2x+3y}$

7. $\dfrac{a}{(a+b)^2}-\dfrac{b}{a^2-b^2}$

8. $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}+\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}$

9. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(a-c)(b-c)}$

10. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

11. $\dfrac{1}{x^2-7x+10}+\dfrac{1}{x^2+13x+40}$

12. $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{2ab}{b^2-a^2}$

13. $\dfrac{1}{a+2b}+\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{2a}{4b^2-a^2}$

14. $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{2(x^2-y^2)}{x^2-y^2}$

15. $\dfrac{a-2x}{a+2x}-\dfrac{a+2x}{a-2x}+\dfrac{8ax}{a^2-4x^2}$

16. $\frac{3x+1}{x-3}-\frac{x-3}{3x+1}-\frac{5x^2+24x}{2x^2-18}$

17. $\frac{4a-b}{1-4ab}-\frac{4a+b}{1+4ab}-\frac{4b(1-8a^2)}{16a^2b^2-1}$

18. $\frac{x}{x-2a}+\frac{x}{x+2a}+\frac{2x^2}{x^2+4a^2}$

19. $\frac{b}{a-b}+\frac{b}{a+b}+\frac{2ab}{a^2+b^2}+\frac{4a^3b}{a^4+b^4}$

20. $\frac{x}{3x-y}+\frac{x}{3x+y}+\frac{6x^2}{9x^2+y^2}$

21. $\frac{1}{x-3a}-\frac{1}{2x+6a}-\frac{x-9a}{2x^2+18a^2}$

22. $\frac{b}{a+b}-\frac{ab}{(a+b)^2}-\frac{ab^2}{(a+b)^3}$ (64A)

23. $\frac{1}{1+a}-\frac{2}{1-a}+\frac{3a}{1-a^2}$

24. $\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2a-1}-\frac{4a}{4a^2-1}$

25. $\frac{1}{3-x}-\frac{1}{3+x}-\frac{2x}{9+x^2}$

26. $\frac{2x}{4+x^2}+\frac{1}{2-x}-\frac{1}{2+x}$

27. $\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a-2b}+\frac{2a}{4b^2-a^2}$

28. $\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}+\frac{2x}{x^2-y^2}$

29. $\frac{a-2x}{a+2x}-\frac{a+2x}{a-2x}+\frac{8ax}{a^2+4x^2}$

30. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}-\frac{(a-b)^2}{(x-a)(x-b)}$

31. $\frac{1}{2x^2-x-1}-\frac{3}{6x^2-x-2}$

32. $\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x^2+4x+3}-\frac{1}{x+3}$

33. $\frac{2}{x^2-3x+2}+\frac{2}{x^2-x-2}-\frac{1}{x^2-1}$

34. $\frac{2}{1-x+x^2}-\frac{1}{1+x+x^2}-\frac{2x}{1-x^2+x^4}$

35. $\frac{1}{1+x+x^2}-\frac{1}{1-x+x^2}-\frac{2x}{1-x^2+x^4}$

36. $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2}+\frac{y^2-(z-x)^2}{(x+y)^2-z^2}+\frac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2}$

37. $\frac{b+c}{2bc}(b+c-a)+\frac{c+a}{2ca}(c+a-b)+\frac{a+b}{2ab}(a+b-c)$

38. $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(y+z-x)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)(z+x-y)$
$+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y-z)$

39. $\frac{b+c}{2bc}(b^3+c^3-a^3)+\frac{c+a}{2ca}(c^3+a^3-b^3)$
$+\frac{a+b}{2ab}(a^3+b^3-c^3)$

नीचे लिखी राशियों की कीमत निकालो—

40. $\frac{x-a}{a}-\frac{x-b}{b}$ यदि $x=\frac{a^2}{a-b}$

41. $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}$; यदि $x=\dfrac{2ab}{a+b}$

42. $\dfrac{x+3a}{x-3a}+\dfrac{x+3b}{x-3b}$; यदि $x=\dfrac{6ab}{a+b}$ (59S)

43. $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}$; यदि $x=a^2+b^2,\ y^2=a^2-b^2$

59. संयुक्त भिन्न (Complex fractions)—

जब किसी भिन्न के अंश अथवा हर में या दोनों में ही भिन्न की राशि हो, तो उसे संयुक्त भिन्न कहते हैं जैसे—

$$\frac{x}{y+\frac{1}{x}},\ \frac{\frac{x}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}},\ \frac{1+\frac{x}{y}}{1-\frac{x}{y^2}},$$ आदि।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. सरल करो—

(i) $\left(1-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)\div\left(\dfrac{x^3-y^3}{x-y}-3xy\right)$

(ii) $$\frac{\frac{a^2}{x-a}+\frac{b^2}{x-b}+\frac{c^2}{x-c}+(a+b+c)}{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}}$$

(iii) $$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}$$

(i) दी हुई राशि $=\left(1-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)\div\left(\dfrac{x^3-y^3}{x-y}-3xy\right)$

$$=\frac{x^2+y^2-2xy}{x^2+y^2}\div\frac{x^3-y^3-3xy(x-y)}{x-y}$$

$$=\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\div\frac{(x-y)^3}{x-y}$$

$$=\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\div(x-y)^2$$

$$=\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\times\frac{1}{(x-y)^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

(ii) दी हुई राशि $=\dfrac{\left(\dfrac{a^2}{x-a}+a\right)+\left(\dfrac{b^2}{x-b}\right)+\left(\dfrac{c^2}{x-c}+c\right)}{\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}}$

$$=\frac{\dfrac{a(a+x-a)}{x-a}+\dfrac{b(b+x-b)}{x-b}+\dfrac{c(c+x-c)}{x-c}}{\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}}$$

$$=\frac{a\left(\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}\right)}{\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}}=x.$$

(iii) दी हुई राशि $=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{1+x}{x}}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1+x}}}$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{1+x+x}{1+x}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1+x}{1+2x}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1+2x+1+x}{1+2x}} = \frac{1+2x}{2+3x}$$

EXAMPLE 48

सरल करो—

1. $\left(x - \dfrac{x-y}{1+xy}\right) \div \left(1 + \dfrac{x(x-y)}{1+xy}\right)$

2. $\dfrac{2}{1-x^2} \div \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x}\right)$

3. $\left(\dfrac{a}{a+x} + \dfrac{x}{a-x}\right) \div \left(\dfrac{a}{a-x} - \dfrac{a}{a+x}\right)$

4. $\left(\dfrac{a^3-b^3}{a-b} - \dfrac{a^3+b^3}{a+b}\right) \div \dfrac{4a}{a^2-b^2}$

5. $\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - 2\right) \div \left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)$

6. $\left(\dfrac{a^2-ax+x^2}{a-x} - \dfrac{a^2+ax+x^2}{a+x}\right) \div \dfrac{x^2}{a^2-x^2}$

7. $\left(y + \dfrac{xy}{x-y}\right)\left(y - \dfrac{xy}{x+y}\right) \times \dfrac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$

8. $\left(\dfrac{x}{1+x} + \dfrac{1-x}{x}\right) \div \left(\dfrac{x}{1+x} - \dfrac{1-x}{x}\right)$

9. $\left(1+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yx}\right)\div\left(1-\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right)$

10. $\left(\frac{ax}{x^2-y^2}-\frac{b}{y-x}-\frac{a}{x+y}\right)\div\left(\frac{ax}{a^2-b^2}-\frac{y}{b-a}-\frac{x}{a+b}\right)$

11. $\left(\frac{x^2+y^2}{xy}-1\right)\left(\frac{x^2+y^2}{y}+1\right)\left(\frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{x^3-y^3}\right)$

12. $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\times\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

13. $\dfrac{\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right)\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)}$

14. $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\div\left(\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)$

15. $\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\right)\times\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\right)$

16. $\dfrac{\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}}{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)}\times\dfrac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}}$

17. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1+x}{x-\frac{1}{x}}}$

18. $1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{a}}}$

19. $$\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{1-\frac{1}{x}}$$

20. $$\frac{\frac{x^2+y^2}{y}-x}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}} \times \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$$

21. $$\frac{\frac{(a+b)^2}{4ab}-1}{\frac{(a-b)^2}{4ab}+1} \times \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$$

22. $$\frac{1+\frac{a-b}{a+b}}{1-\frac{a-b}{a+b}} \div \frac{1+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{1-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$$

23. $$\left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a-b}\right) \div \left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)$$

24. $$\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right) \div \left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$$

25. $$\frac{x^2-4}{x^2+3x-18} \div \frac{x^2-5x-14}{x^2-36}$$

26. $$\left(1-\frac{2pq}{p^2+q^2}\right) \div \left(\frac{p^3-q^3}{p-q}-3pq\right)$$

27. $$\frac{a^3+b^3+3ab(a+b)}{(a+b)^2-4ab} \div \frac{(a-b)^2+4ab}{a^3-b^3-3ab(a-b)}$$

28. $\dfrac{x^3+y^3}{(x-y)^2+3xy} \div \dfrac{(x+y)^2-3xy}{x^3-y^3} \times \dfrac{xy}{x^2-y^2}$

29. $\dfrac{a(a-b)^2+4a^2b}{ab+b^2} \div \dfrac{a^3-b^3}{ab} \times \dfrac{b(a+b)^3-4ab^2}{a^2-ab}$

30. $\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \div \left(\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}\right)$

31. $\dfrac{a^4-b^4}{(a+b)^3-3ab(a+b)} \div \dfrac{(a+b)^2-4ab}{(a+b)^2-3ab} \times \dfrac{a}{(a+b)^2-2ab}$

32. $\dfrac{(a-b)\{(a+b)^2-ab\}}{(a-b)^2-2ab} \div \dfrac{(a-b)^2+3ab}{(a+b)\{(a-b)^2+ab\}}$

$$\times \dfrac{(a+b)^2-2ab}{(a+b)^2-3ab}$$

33. $\dfrac{x}{z}\left(\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y}\right) \times \dfrac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2} \div \dfrac{1}{x+y}$

34. $\dfrac{1}{x+4} \div \left[\dfrac{y}{2}\left(\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y}\right) \times \dfrac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2}\right]$

35. $\left[\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right) \div \dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}\right] \times \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$

36. $\left\{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{a+x} + \dfrac{1}{a-x}\right\} \div \left(\dfrac{a+x}{a-x} - \dfrac{a-x}{a+x}\right)$

37. $$\dfrac{\dfrac{a}{x-a} + \dfrac{b}{x-b} + \dfrac{c}{x-c} + 3}{\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c}}$$

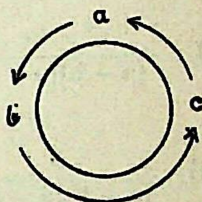
38. $$\dfrac{\dfrac{(a+b)^2}{4ab} - 1}{\dfrac{(a-b)^2}{4ab} + 1} \times \left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$$

39. $$\frac{1+\frac{a-b}{a+b}}{1-\frac{a-b}{a+b}} \div \frac{1+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{1-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$$

40. $$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}} - \frac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{b-a}{a-b}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}$$

60. चक्रीय क्रम वाले भिन्न—

मान लो कि कोई तीन अक्षर a, b, और c एक वृत्त की परिधि पर क्रमानुसार लिखे गये हैं। यदि हम किसी एक अक्षर से आरम्भ करें और तीरों से दिखलाये हुए मार्ग से चलें तो a के बाद b, b के बाद c और c के बाद फिर शुरू का अक्षर a पड़ेगा। अक्षरों के इस क्रम को चक्रीय क्रम (*Cyclic order*) कहते हैं। चक्रीय भिन्नों को सरल करने के लिए निम्नलिखित परिणामों का सहारा लेना उपयोगी होगा।



(i) $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$

(ii) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$

(iii) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=bc(b-c)+ca(b-a)+ab(a-b)$
$=-(b-c)(c-a)(a-b)$

(iv) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$
$=(b+c)(c+a)(a+b)$

(v) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

$$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$$

$$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

(vi) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. सरल करो—

(i) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

(P.U. 38, 48)

(ii) $\dfrac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2-ac}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$

(54S, 56A)

(iii) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$

(P. U. 43S)

(iv) $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$

(P. U. 34, 41, 58S)

(i) दी हुई राशि के हरों को चक्रीय क्रम में रखने पर, दी हुई राशियाँ,

$$=-\left\{\frac{a^2}{(a-b)(c-a)}+\frac{b^2}{(b-c)(a-b)}+\frac{c^2}{(c-a)(b-c)}\right\}$$

$$=-\left\{\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\right\}$$

$$=\frac{-\{-(a-b)(b-c)(c-a)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1.$$

(ii) दी हुई राशि के हरों को चक्रीय क्रम में रखने पर, दी हुई राशियाँ,

$$= -\left\{\frac{a^2 - bc}{(a-b)(c-a)} + \frac{b^2 - ac}{(b-c)(a-b)} + \frac{c^2 - ab}{(c-a)(b-c)}\right\}$$

$$= -\left\{\frac{(a^2 - bc)(b-c) + (b^2 - ac)(c-a) + (c^2 - ab)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\right\}$$

$$= -\left\{\frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) - bc(b-c) - ca(c-a) - ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(b-a)}\right\}$$

$$= -\frac{-\{-(a-b)(b-c)(c-a) + (a-b)(b-c)(c-a)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0.$$

(iii) दी हुई प्रत्येक राशि के हरों को चक्रीय क्रम में रखने पर दी हुई राशियाँ,

$$= \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$= -\left\{\frac{1}{(a-b)(c-a)} + \frac{1}{(b-c)(a-b)} + \frac{1}{(c-a)(b-c)}\right\}$$

$$= \frac{-\{(b-c) + (c-a) + (a-b)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0.$$

(iv) दी हुई प्रत्येक राशि के हरो को चक्रीय क्रम में रखने पर दी हुई राशियाँ,

$$= -\left\{\frac{bc}{(a-b)(c-a)} + \frac{ca}{(b-c)(a-b)} + \frac{ab}{(c-a)(b-c)}\right\}$$

$$= -\left\{\frac{bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\right\}$$

$$= \frac{-\{-(a-b)(b-c)(c-a)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1.$$

EXAMPLE 49

सरल करो—

1. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

2. $\dfrac{1}{bc(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{ca(b-c)(b-a)} + \dfrac{1}{ab(c-a)(c-b)}$

3. $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

4. $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$

5. $\dfrac{a^2(b+c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2(c+a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2(a+b)}{(c-a)(c-b)}$

6. $\dfrac{a^2(b-c)}{(a+b)(a+c)} + \dfrac{b^2(c-a)}{(b+c)(b+a)} + \dfrac{c^2(a-b)}{(c+a)(c+b)}$

7. $\dfrac{a^2bc}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2ca}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^2ab}{(c-a)(c-b)}$

8. $\dfrac{a+1}{(a-b)(c-a)} + \dfrac{b+1}{(b-c)(a-b)} + \dfrac{c+1}{(c-a)(c-b)}$ (P.U.18)

9. $\dfrac{a+b-c}{(c-a)(c-b)} + \dfrac{b+c-a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{c+a-b}{(b-c)(b-a)}$ (P.U. 32)

10. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{b(b-c)(b-a)} + \dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$

(P.U. 21, 55S)

11. $\dfrac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b(c+a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c(a+b)}{(c-a)(c-b)}$

12. $\dfrac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2+ca}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2+ab}{(c-a)(c-b)}$

13. $\dfrac{(x+a)^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(x+b)^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{(x+c)^2}{(c-a)(c-b)}$ (P.U. 29)

14. $\dfrac{b^2+bc+cb}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{c^2+ca+a^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{a^2+ab+b^2}{(c-a)(c-b)}$

(P.U. 50A)

15. $\dfrac{b^2c^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{c^2a^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{a^2b^2}{(c-a)(c-b)}$

16. $$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

17. $$\frac{1}{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{a}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{c}{b}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{a}{c}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right)}$$ (P.U.39A)

18. $$\frac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$$ (P.U. 19)

19. $$\frac{bc(x-a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(x-b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab(x-c)}{(c-a)(c-b)}$$ (P.U. 27)

20. $$\frac{b-c}{a^2-(b-c)^2}\quad\frac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\frac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$$ (P.U. 31, 40, 47)

21. $$\frac{bc}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{ca}{b(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\frac{ab}{c(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$ (P.U. 39S)

22. $$\frac{b^2c^2}{(c^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{c^2a^2}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\frac{a^2b^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

23. $$\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}$$

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$\frac{a}{bc(a-b)(a-c)}+\frac{b}{ca(b-c)(b-a)}+\frac{c}{ab(c-a)(c-b)}$$

26. $\dfrac{a^2(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2(c+a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2(a+b)}{(c-b)(c-a)}$

27. $\dfrac{la+m}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{lb+m}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{lc+m}{(c-a)(c-b)}$

28. $\dfrac{(a+1)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(b+1)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(c+1)^2}{(c-a)(c-b)}$

29. $\dfrac{2a-b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{2b-c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{2c-a-b}{(c-a)(c-b)}$

30. $\dfrac{a^2+a+1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2+b+1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2+c+1}{(c-a)(c-b)}$

31. सिद्ध करो कि—

$$\frac{1}{(l-m)(l-n)(x-l)}+\frac{1}{(m-n)(m-l)(x+m)}$$
$$+\frac{1}{(n-l)(n-m)(x+n)}=\frac{1}{(x+l)(x+m)(x+n)}$$

[संकेत—मान लो कि $x+l=a,\ x+m=b,\ x+n=c$ हो, तो $a-b=l-m,\ a-c=l-n$ और $b-c=m-n$.

अतः दिया हुआ व्यंजक,

$$=\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{1}{abc}\left\{\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}\right\}$$

32. सिद्ध करो कि—

$$\frac{y-z}{x+a}+\frac{z-x}{y+a}+\frac{x-y}{z+a}+\frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{(x+a)(y+a)(z+a)}=0$$

[संकेत : मान लो कि $x+a=p$, $y+a=q$ और $z+x=r$, तो

$$\frac{y-z}{x+a}=\frac{q-r}{p}$$ इत्यादि।]

33. सरल करो—

$$\frac{b+c-a}{(b+c)(c-a)(a-b)}+\frac{c+a-b}{(c+a)(a-b)(b-c)}+\frac{a+b-c}{(a+b)(b-c)(c-a)}$$

34. सिद्ध करो कि—

$$\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=a+b+c$$

चौदह

शर्त्तवाले तादात्म्य

(Conditional Identities)

81. जब एक बीजगणितीय व्यंजक दूसरे बीजगणितीय व्यंजक के बराबर होता है और अक्षरों के विभिन्न मानों के लिए सम्बन्ध में कोई अन्तर नहीं पड़ता है तो ऐसे सम्बन्ध को तादात्म्य कहते हैं।

जैसे $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ इत्यादि।

ये दोनों सम्बन्ध तादात्म्य हैं, क्योंकि ये दोनों सम्बन्ध a और b के किसी मान के लिए भी सत्य हैं। इस अध्याय में शर्त्तवाले तादात्म्य पर विशेष रूप से विचार किया जायगा। इस तादात्म्य के अन्दर कोई एक शर्त्त दी रहती है और इस शर्त्त की मदद से दिया हुआ सम्बन्ध साबित किया जाता है। शर्त्त को अपनी-अपनी आवश्यकतानुसार दूसरे रूप में भी बदल सकते हैं। जैसे अगर $a+b+c=0$ दिया गया हो, तो इसे बदल कर $a+b=-c=$, $a+c=-b$ या, $b+c$ $-a$ के रूप में भी लिख सकते हैं। शर्त्तवाले तादात्म्य को हल करने का तरीका निम्नलिखित साधित उदाहरणों से अच्छी तरह समझ में आ जायगा।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $a+b+c=0$ हो, तो साबित करो कि

$$a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 = c^2 + ca + a^2 \qquad (65A)$$

$\because \quad a+b+c=0$

$\therefore \quad a = -(b+c)$; $b = -(c+a)$ और $c = -(a+b)$

$\therefore \quad a^2 + ab + b^2 = a(a+b) + b^2$

$$=\{-(b+c)\}(-c)+b^2$$
$$=(b+c)c+b^2$$
$$=b^2+bc+c^2$$

और $b^2+bc+c^2=b(b+c)+c^2$
$$=\{-(c+a)\}(-a)+c^2$$
$$=(c+a)a+c^2$$
$$=c^2+ca+a^2$$

$\therefore \quad a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2$

उदाहरण 2. यदि $s=a+b+c$ हो, तो साबित करो कि
$(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$

(P.U. 35)

$\because \quad s=a+b+c,$

अत: $(as+bc)=a(a+b+c)+bc$
$$=a^2+ab+ac+bc$$
$$=a(a+b)+c(a+b)=(a+b)(c+a)$$

$bs+ca=b(a+b+c)+ca$
$$=ab+b^2+bc+ca$$
$$=b(a+b)+c(a+b)$$
$$=(a+b)(b+c)$$

$cs+ab=c(a+b+c)+ab$
$$=ca+cb+c^2+ab$$
$$=ab+ca+cb+c^2$$
$$=a(b+c)+c(b+c)$$
$$=(b+c)(c+a)$$

$\therefore \quad (as+bc)(bs+ca)(cs+ab)$
$$=(a+b)(c+a)(a+b)(b+c)(b+c)(c+a)$$
$$=(a+b)^2(c+a)^2(b+c)^2$$

उदाहरण 3. यदि $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{ca}-\frac{1}{ab}=0,$

तो साबित करो कि $a=b=c$ (H.S. 65A)

हम जानते हैं कि $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$$=\tfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{ca}-\frac{1}{ab}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}$$

$=0$ (दिया हुआ है)

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2=0$$

लेकिन $L.H.S.$ के तीनों पद धनात्मक है ($\because$ पूर्ण वर्ग है)

$\therefore$ उनका योग $=0$ तब ही होगा जब उनमें से प्रत्येक $=0$

$\therefore \quad \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=0;$ या, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0;$

या, $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ $\therefore \quad a=b.$

या, $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2=0;$ या, $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0;$

या, $\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ $\therefore \quad b=c$

या, $\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2=0;$ या, $\frac{1}{c}-\frac{1}{a}=0;$

या. $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$ $\therefore \quad c=a.$

$\therefore \quad a=b=c.$ **Proved.**

उदाहरण 4. यदि $ab+bc+ca=0$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0$$

(P.U.33; SS.62 A, 64S)

$\because \quad ab+bc+ca=0$

$\therefore \quad -ab=bc+ca;\ -bc=ab+ca$ और $-ca=ab+bc.$

$\therefore$ प्रथम पद $\dfrac{1}{a^2-bc}=\dfrac{1}{a^2+ab+ca}=\dfrac{1}{a(a+b+c)}$

इसी तरीके से दूसरा और तीसरा पद भी निकाला जायगा।

$$\therefore \text{ व्यंजक } =\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}$$

$$=\frac{1}{a(a+b+c)}+\frac{1}{b(a+b+c)}+\frac{1}{c(a+b+c)}$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right\}$$

$$=\frac{1}{+\ b+c}\left\{\frac{bc+ca+ab}{abc}\right\}=0$$

[$\because \quad ab+bc+ca=0$ Proved.

उदाहरण 5. यदि $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$ हो, तो सिद्ध करोकि

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3$$ (P.U.34,H.S. 64S)

$\because \quad (a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$

या, $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=3(ab+bc+ca)$

या, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\therefore \quad (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

या, $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

या, $a^3+b^3+c^3=3abc$

या, $\frac{a^3}{abc}+\frac{b^3}{abc}+\frac{c^3}{abc}=3$

$\therefore \quad \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3$. Proved

उदाहरण 6. यदि $a+b+c=0$ हो, तो साबित करो कि

(i) $\mathbf{a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab}$

(ii) $\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0$ (60A)

(i) $\because \quad a+b+c=0$

$\therefore \quad a=-(b+c),\ b=-(c+a)$ और $c=-(a+b)$

$\therefore \quad a^2-bc=a^2-(c+a)(a+b)$

$=a^2-(ab+ca+bc)-a^2$

$=-(ab+ca+bc)$

इसी तरीके से, $b^2-ca=-(ab+ca+bc)$

और $c^2-ab=-(ab+ca+bc)$

$\therefore \quad a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab.$

(ii) $\because \quad a+b+c=0$

$\therefore \quad a=-(b+c),\ b=-(c+a)$ और $c=-(a+b)$

$\therefore \quad b^2+c^2-a^2=b^2+c^2-(b+c)^2=2bc$

इसी तरह, $c^2+a^2-b^2=2ca$

और $a^2+b^2-c^2=-2ab$

$\therefore$ व्यंजक $=\frac{1}{-2bc}+\frac{1}{-2ca}+\frac{1}{-2ab}$

$=\frac{-1}{2}\left\{\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right\}$

$$=\frac{-1}{2}\left\{\frac{a+b+c}{abc}\right\}=0$$

$(\because \quad a+b+c=0)$. Proved

उदाहरण 7. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो साबित करो कि

$$(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c=c^3.$$

$\because \quad a+b+c=2s$

$\therefore \quad c=2s-(a+b)=(s-a)+(s-b)$

$\therefore \quad L.H.S.=(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)\{(s+a)+(s-b)\}$

$=\{(s-a)+(s-b)\}^3$

$=\{2s-(a+b)\}^3$

$=c^3$ Provd.

उदाहरण 8. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो साबित करो कि

$$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=16s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$L.H.S.=(2bc)^2-(b^2+b^2-a^2)^2$

$=(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)$

$=\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$

$=\{(b+c+a)(b+c-a)\}\{(a+b-c)(a-b+c)\}$

$=\{2s(a+b+c-2a)\}\{(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)\}$

$=2s(2s+2a)(2s-2c)(2s-2b)$

$=16s(s-a)(s-b)(s-c)=L.H.S.$ Proved.

उदाहरण 9. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो साबित करो कि

$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc=s^3$$

हम जानते हैं कि

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y(x+z)(y+z)$$

$\therefore \quad (s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=(s-a+s-b+s-c)^3$
$\quad -3(s-a+s-b)(s-a+s-c)(s-b+s-c)$
$\quad =\{(3s-(a+b+c)\}^3-3\{2s-(a+b\}$
$\quad \{2s-(a+c)\}\{2s-\{(b+c)\}$
$=(3s-2s)^3-3(2s-2s+a)(2s-2s+b)(2s-2s+c)$
$=s^3-3abc$

$\therefore \quad (s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc$
$=s^3$ **Proved.**

उदाहरण 10. यदि $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}$ हो, तो साबित करो कि

$$\mathbf{x(b+c)+y(c+a)+z(a+b)=0} \qquad \text{(59A)}$$

$\because \quad \dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}=k$ (माना)

$\therefore \quad x=k(b-c),\ y=k(c-a)$ और $z=k(a-b)$

$\therefore \quad x(b+c)+y(c+a)+z(a+b)$
$=k(b-c)(b+c)+k(c-a)(c+a)+k(a-b)(a+b)$
$=k(b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2)$
$=k\times 0=0$ **Proved.**

उदाहरण 11. यदि $x=\dfrac{6ab}{a+b}$ हो, तो

$\dfrac{\mathbf{x+3a}}{\mathbf{x-3a}}+\dfrac{\mathbf{x+3b}}{\mathbf{x-3b}}$ का मान बताओ। (59S)

$\because \quad x=\dfrac{6ab}{a+b}$

$\therefore \quad x(a+b)=6ab$

$\therefore \quad x(a+b)-6ab-6ab=0$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $= \frac{x+3a}{x-3a} + \frac{x+3b}{x-3b}$

$$= \frac{x+3a}{x-3a} - 1 + \frac{x+3b}{x-3b} - 1 + 2$$

$$= \frac{6a}{x-3a} + \frac{6b}{x-3b} + 2$$

$$= 6\left\{\frac{ax-3ab+bx-3ab}{(x-3a)(x-3b)}\right\} + 2$$

$$= 6\left\{\frac{x(a+b)-6ab}{(x-3a)(x-3b)}\right\} - 2$$

$$= 0 + 2 \; [\because \quad x(a+b) - 6ab = 0$$

$$= 2$$ **Proved**

उदाहरण 12. यदि $a+b+c=0$ हो तो साबित करो कि

$$\frac{x}{a^2+b^2-c^2} + \frac{x}{a^2+c^2-b^2} + \frac{x}{b^2+c^2-a^2} = 0 \quad (60A)$$

$\because \quad a+b+c=0$

$\therefore \quad -a=b+c, \; -b=c+a$ और $-c=a+b$

$\therefore \quad a^2+b^2-c^2 = a^2+b^2-(a+b)^2 = -2ab$

इसी प्रकार $a^2+c^2-b^2 = -2ac$

$b^2+c^2-a^2 = -2bc$

$\therefore$ व्यंजक $= \frac{-x}{2ab} + \frac{-x}{2ac} + \frac{-x}{2bc}$

$$= \frac{-x}{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right)$$

$$=\frac{-x}{2}\left\{\frac{c+b+a}{abc}\right\}$$

$$=\frac{-x}{2}\times\frac{0}{abc} \qquad [\because \ a+b+c=0]$$

$$=0 \qquad \text{Proved.}$$

उदाहरण 13. यदि $x=\dfrac{4ab}{a+b}$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2 \qquad (61S)$$

$\because \quad x=\dfrac{4ab}{a+b}$

$\therefore \quad x(a+b)=4ab$

$\therefore \quad x(a+b)-4ab=0$

$$\therefore \quad L.H.S.=\frac{x+2a}{x-2a}-1+\frac{x+2b}{x-2b}-1+2$$

$$=\frac{4a}{x-2a}+\frac{4b}{x-2b}+2$$

$$=4\left\{\frac{ax-2ab+bx-2ab}{(x-2a)(x-2b)}\right\}+2$$

$$=4\left\{\frac{x(a+b)-4ab}{(x-2a)(x-2b)}\right\}+2$$

$$=2 \qquad [\because \ x(a+b)-4ab=0 \qquad \text{Proved.}$$

EXAMPLE 50

1. यदि $a+b+c=0$ हो, तो साबित करो कि—

   (i) $a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)$

   (ii) $a^3+b^3+c^3=3abc$

(iii) $(bc+ca+ab)^2 = b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$
$$= \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2$$

(iv) $a^4+b^4+c^4 = 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$
$$= \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$$

(v) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

(vi) $\frac{a^2}{a^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{b^2-c^2-a^2}+\frac{c^2}{c^2-a^2-b^2} = \frac{3}{2}$

(vii) $a(a+b)(a+c) = b(b+a)(b+c) = c(c+a)(c+b)$

(viii) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} = -3$

(ix) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = -3$

(x) $a(b^2+c^2-a^2) = b(c^2+a^2-b^2) = c(a^2+b^2-c^2)$

(xi) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2 = 3abc$

(xii) $a(a+b)(a+c)+b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)$
$$= a^3+b^3+c^3$$

(xiii) $(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3$
$$= 3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

(xiv) $\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$
$$= 9$$

(xv) $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab} = 3$

(xvi) $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 0$

(xvii) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=0$

(xviii) $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3+\frac{3}{abc}$

2. यदि $x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$ हो, तो साबित करो कि—

(i) $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

(ii) $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$

$=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ (P.U. 22)

3. यदि $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ $z=a+b-c$ हो, तो साबित करो कि $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

4. यदि $xy=x^2+y^2$, $yz=y^2+z^2$ और $zx=z^2+x^2$ हो, तो साबित

करो कि $\frac{x^2}{x^2+yz}+\frac{y^2}{y^2+zx}+\frac{z^2}{z^2+xy}=1$

5. यदि $x^2=y+z$, $y^2=z+x$, $z^2=x+y$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=1 \quad (63A)$$

6. यदि $x=a^2(b-c)$, $y=b^2(c-a)$, $z=c^2(a-b)$ हो, तो साबित

करो कि $\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left(\frac{y}{b}\right)^3+\left(\frac{z}{c}\right)^3$

$=3abc(a-b)(b-c)(c-a)$

7. यदि $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$ हो, तो साबित करो

कि $\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}=(a+b+c)(x+y+z)$

(P.U. 23)

8. यदि $s=a+b+c$ हो, तो साबित करो कि—

(i) $(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=a^2+b^2+c^2+s^2$

(ii) $(s-a)(s-b)(s-c)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

(iii) $(s-3a)^2+(s-3b)^2+(s-3c)^2$

$$=3\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

(iv) $\left(\frac{s}{3}-a\right)^3+\left(\frac{s}{3}-b\right)^3+\left(\frac{s}{3}-c\right)^3$

$$=3\left(\frac{s}{3}-a\right)\left(\frac{s}{3}-b\right)\left(\frac{s}{3}-c\right)$$

9. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो साबित करो कि—

(i) $s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=a^2+b^2+c^2$ **(65S)**

(ii) $(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)$

$$=s^2-\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

(iii) $a(s-c)+b(s-a)+c(s-b)=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$

(iv) $2(s-a)(s-b)(s-c)+a(s-b)(s-c)+b(s-c)(s-a)$

$+c(s-a)(s-b)=abc$ **(P.U. 19)**

10. यदि $a+b+c=4s$ हो, तो साबित करो कि—

$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$

$$=\tfrac{1}{4}(3abc-a^3-b^3-c^3)$$

11. यदि $ab+bc+ca=0$ हो, तो साबित करो कि—

(i) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$

(ii) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=-2abc(a+b+c)$

(iii) $(a^2+b^2+c^2)^3=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$

(iv) $\dfrac{a^2}{a^2-bc}+\dfrac{b^2}{b^2-ca}+\dfrac{c^2}{c^2-ab}=1$

(v) $\dfrac{a}{a^2-bc}+\dfrac{b}{b^2-ca}+\dfrac{c}{c^2-ab}=\dfrac{3}{a+b+c}$

12. यदि $\dfrac{1}{b^3(a-c)}+\dfrac{1}{a^3(b-c)}=\dfrac{1}{ab(a-c)(b-c)}$ हो, तो

साबित करो कि $a^2+b^2=ab$; या, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$ **(63 S)**

13. यदि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ हो, तो साबित करो कि

(i) $\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}=\frac{1}{(a+b+c)^5}=\frac{1}{a^5+b^5+c^5}$

(ii) $\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{(a+b+c)^7}=\frac{1}{a^7+b^7+c^7}$

14. यदि $a+b+c=3s$ हो, तो साबित करो कि
$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=3(s-a)(s-b)(s-c)$

15. यदि $a+b+c=2s$ हो, तो साबित करो कि
$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

16. यदि $x+y+z=0$ हो, तो साबित करो कि
$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$.

17. यदि $x=b-c$, $y=c-a$, $z=a-b$ हो, तो साबित करो कि
$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0$

18. यदि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ हो, तो साबित करो कि
$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}$

19. यदि $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$ हो, तो साबित करो कि
$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$

20. यदि $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=0$ हो, तो साबित करो कि
$a=b=c$

21. यदि $x^2 = by + cz$, $y^2 = cz + ax$, $z^2 = ax + by$ हो, तो साबित करो कि $\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x} + \frac{c}{c+x} = 1$

22. यदि $x + y + z = 0$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{x^2}{x^2 - y^2 - z^2} + \frac{y^2}{y^2 - x^2 - z^2} + \frac{z^2}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{3}{2}$$

23. यदि $x + y + z = xyz$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{y+z}{1-yz} + \frac{z+x}{1-zx} + \frac{x+y}{1-xy} = \frac{y+z}{1-yz} \cdot \frac{z+x}{1-zx} \cdot \frac{x+y}{1-xy}$$

24. साबित करो कि

$$\frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} + \frac{a-b}{1+ab} = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}$$

25. दिखलाओ कि

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right)$$

26. यदि $y + z = ax$, $z + x = by$, $x + y = cz$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1$$

27. यदि $\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = 1$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = 4$$

28. यदि $\frac{x+y}{x-y} + \frac{y+z}{z-y} + 2 = 0$ हो तो साबित करो कि

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$$

29. यदि $(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)$ हो, तो साबित करो कि $a=b=c$

30. यदि $a+b-c=0$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2$$

31. यदि $a+b+c$ हो, तो साबित करो कि

$$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

32. साबित करो कि

$$\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)^2=\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}$$

33. यदि $3s=a+b+c$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{(s-a)^2}{(s-b)(s-c)}+\frac{(s-b)^2}{(s-c)(s-a)}+\frac{(s-c)^2}{(s-a)(s-b)}=3$$

34. यदि $a+b+c=0$ हो, तो साबित करो कि

(i) $\dfrac{1}{2a^2+bc}+\dfrac{1}{2b^2+ca}+\dfrac{1}{2c^2+ab}=0$

(ii) $\dfrac{a}{2a^2+bc}+\dfrac{b}{2b^2+ca}+\dfrac{1}{2c^2+ab}=0$

(iii) $\dfrac{a^2}{2a^2+bc}+\dfrac{b^2}{2b^2+ca}+\dfrac{c^2}{2c^2+ab}=0$

35. यदि $a+b+c=0$ हो, तो साबित करो कि

(i) $(a^2-bc)^2=(b^2-ca)(c^2-ab)$

(ii) $(bc+ca+ab)^3+(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)=0$

(iii) $(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)+8a^2b^2c^2=0$

36. यदि $x+y+z=1$ हो, तो साबित करो कि

(i) $(x+yz)(y+zx)(z+xy)=(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2$

(ii) $(x+yz)(y+z)=(y+zx)(z+x)=(z+xy)(x+y)$
$=(1-x)(1-y)(1-z)$

37. यदि $yz+zx+xy=1$ हो, तो साबित करो कि

(i) $\dfrac{1-yz}{y+z}+\dfrac{1-zx}{z+x}+\dfrac{1-xy}{x+y}=x+y+z$

(ii) $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)$
$+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$

38. यदि $x+y+z=xyz$ हो, तो साबित करो कि
$(1+x)(1+y)(1+z)-(1-x)(1-y)(1-z)=4xyz$

39. यदि $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}=1$ हो, तो साबित करो कि

(i) $\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{y}{1+y}+\dfrac{z}{1+z}=2$ (ii) $xyz=x+y+z$

40. $x+y+z=xyz$ हो, तो साबित करो कि

(i) $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2}=\dfrac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$

(ii) $\dfrac{2x}{1-x^2}+\dfrac{2y}{1-y^2}+\dfrac{2z}{1-z^2}=\dfrac{2x}{1-x^2}\cdot\dfrac{2y}{1-y^2}\cdot\dfrac{2z}{1-z^2}$

पन्द्रह

सरल समीकरण

(Simple Equation)

62. परिभाषा—

अगर दो व्यंजक आपस में बराबर हों, तो इस बराबरी या समानता को समीकरण *(Equation)* कहते हैं। दोनो व्यंजकों के बीच में बराबरी चिन्ह (=) रख देते हैं। बराबरी के चिन्ह के दोनों ओर के व्यंजक समीकरण के पक्ष *(Side)* कहलाते हैं। इस चिन्ह के पहले का व्यंजक बायाँ पक्ष और बाद का दाहिना पक्ष कहलाता है। उदाहरण के लिए

$$(x-a)(x+a)=x^2-a^2 \qquad \text{(i)}$$

$$2x+5=7 \qquad \text{(ii)}$$

ये दोनों समीकरण हैं। पहले समीकरण में 'x' और 'a' का कुछ भी मान हो $(x-a)(x+a)$ हमेशा x^2-a^2 के बराबर होगा; लेकिन दूसरे समीकरण में अगर x का मान 1 हो, तभी $2x+5$, 7 के बराबर होगा। 'x' का कोई भी दूसरा मान लेने से $2x+5=7$ नहीं हो सकता।

पहले समीकरण $\{(x-a)(x+a)=x^2-a^2\}$ में दोनों पक्ष बराबर हैं— चाहे 'x' का मान कुछ भी क्यों न हो। ऐसे समीकरण को अभेद समीकरण अथवा तादात्म्य *(Identical equation or identity)* कहते हैं।

दूसरे समीकरण $\{2x+5=7\}$ के दोनों पक्ष तभी बराबर होंगे, जबकि $x=1$ हो। 'x' का कोई भी दूसरा मान रखने से दोनों पक्ष बराबर नहीं हो सकते। इस तरह के समीकरण आश्रित समीकरण *(Conditional equation)* या सिर्फ समीकरण *(Equation)* कहलाते हैं।

समीकरण को हल (*Solve*) करके जिस अक्षर का मान ज्ञात हो जाता है, उस अक्षर को अज्ञात राशि (*Unknown quantity*) कहते हैं। अज्ञात राशि के लिए साधारणतः 'x' लिखा जाता है। अज्ञात राशि का जो मान उस समीकरण को ठीक सिद्ध करता है, उस मान को उस समीकरण का बीज या मूल (*Root*) कहते हैं।

जिस समीकरण में एक ही अज्ञात पद हो और उसका घात एक हो, उस समीकरण को एक-घात-वर्ण समीकरण या सरल समीकरण (*Simple equation*) कहते हैं।

63. स्वयं सिद्धियाँ—

समीकरण हल (*Solve*) करते समय निम्नलिखित स्वयं सिद्धियों (*Axioms*) को व्यवहार में लाते हैं—

(i) अगर बराबर संख्याओं में बराबर संख्याएं जोड़ दी जायें, तो जोड़ आपस में बराबर होंगे। जैसे $x=a$ हो, तो अगर दोनों तरफ b जोड़ें, तो

$x+b=a+b$ होगा।

(ii) अगर संख्याओं में बराबर संख्याएं घटा दी जायें तो शेष आपस में बराबर होंगे। जैसे, $x=m$ हो, तो दोनों तरफ से n घटाने पर $x-n=m-n$ होगा।

(iii) अगर बराबर संख्याओं को बराबर संख्याओं से गुणा किया जाय, तो गुणनफल आपस में बराबर होंगे। जैसे,

अगर $x=l$, तो दोनों तरफ से k से गुणा करने पर

$xk=lk$

(iv) अगर बराबर संख्याओं को बराबर संख्याओं से भाग दिया जाय तो भागफल आपस में बराबर होंगे।

अगर $6x=54$, तो दोनों तरफ 6 से भाग देने पर

$$\frac{6x}{6}=\frac{54}{6}, \qquad \text{या } x=9$$

नोट—स्वयं सिद्धि (i) और (ii) से समीकरण को हल करने के लिए नीचे दिये हुए नियम निकलते हैं—

समीकरण के किसी पद को उसका चिन्ह बदल कर एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जा सकते हैं। इस क्रिया को पक्षान्तर करना (*Transposition*) कहते हैं। साधारणतः अज्ञात राशि को बायें पक्ष और ज्ञात राशि को दायें पक्ष में रखना अच्छा होता है। यह नीचे दिये हुए साधित उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगा।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. हल करो—$7x+9=5x+19$

$5x$ को दाहिने से बायें तथा 9 को बायें से दाहिने लाने पर

$7x-5x=19-9$ ($\because$ पक्षान्तर में चिन्ह बदल जाते हैं)।

या, $2x=10$

नोट—यदि समीकरण में अज्ञात राशि के स्थान पर उसका मूल्य रखने से दोनों पक्षों का मान बराबर आता है तो हल ठीक है, अन्यथा नहीं। इससे उत्तर की जाँच करते हैं। जैसे ऊपर के उदाहरण में $x=5$ रखने पर,

बायाँ पक्ष $=7\times5+9=35+9=44$

बायाँ पक्ष $=5\times5+19=25+19=44$

दोनों पक्षों का मान 44 आता है, अतः उत्तर ठीक है।

उदाहरण 2. हल करो—

(i) $3(x+3)^2+5(x+5)^2=8(x+8)^2$ (62A)

(ii) $(x-a)(x-b)=(x-a-b)^2$ (63A)

(i) $3(x+3)^2+5(x+5)^2=8(x+8)^2$

या, $3(x^2+6x+9)+5(x^2+10x+25)=8(x^2+16x+64)$

या, $3x^2+18x+27+5x^2+50x+125=8x^2+128x+512$

या, $8x^2+68x+152=8x^2+128x+512$

या, $8x^2+68x-8x^2-128x=512-152$

या, $-60x = 360$

∴ $x = -6.$

(ii) $(x-a)(x-b) = (x-a-b)^2$

या, $x^2 - x(a+b) + ab = x^2 + a^2 + b^2 - 2ax - 2xb + 2ab$

या, $x^2 - x(a+b) + ab = x^2 + a^2 + b^2 - 2x(a+b) + 2ab$

या, $-x(a+b) + 2x(a+b) = a^2 + b^2 + 2ab - ab$

या, $x(a+b) = a^2 + b^2 + ab$

∴ $x = \dfrac{a^2 + b^2 + ab}{a+b}$

EXAMPLE 51

नीचे लिखे समीकरणों को हल करो—

1. $9x = 27$ 2. $7x = 35$ 3. $3x = -27$

4. $-3x = 12$ 5. $9x = 0$ 6. $-7x = -56$

7. $\dfrac{x}{5} = 9$ 8. $\dfrac{-x}{10} = 3$ 9. $\dfrac{3x}{4} = 15$

10. $\dfrac{5x}{9} = \dfrac{50}{18}$ 11. $\dfrac{3x}{7} = \dfrac{24}{49}$ 12. $\dfrac{3x}{4} = 6$

13. $3x + 5 = 17$ 14. $4x + 7 = 15$ 15. $11x + 5 = 38$

16. $7x + 9 = 5x + 13$ 17. $15 + 5x = 92 - 2x$

18. $8x + (x-4) = 12x - 16$ 19. $5x + 5(2-x) = 2(x-8)$

20. $4(1-2x) + 3(-5x) = 10x - 95$

21. $5(x-3) + 7(x-9) = 3(x-11) - 63$

22. $(x+1)(2x+3) = 2(x+1)^2 - 7$

23. $(x+1)^2 + 3(x+2)^2 = 4(x+5)^2 - 217$

24. $a(x+b) - b(x+a) = a - b$

25. $a(x-a) + b(x-b) = 2ab$

26. $(x-a)(x+b) - (x+a)(x-b) = 4(a-b)$

27. $5x-8=3x+10$

28. $(6x+9)^2+(8x-7)^2=(10x+3)^2-71$

29. $\frac{x-6}{8}-\frac{2x-15}{9}+1=\frac{x}{15}-\frac{x-12}{6}$

30. $x(x+7)=6+(x+1)(x+2)$

31. $(x+2)(x+3)=(x+4)(x+5)-30$

32. $x^2+9-(x-1)(x+9)=5(2-x)-7x$

33. $(x-2)(x-3)=(x-5)^2$

34. $\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+b}{x+a}$ 35. $\frac{x+b}{x+a}+\frac{x+b}{x-b}=2$

64. भिन्नवाले समीकरण (Equations in fractional form)

अगर कोई भिन्न वाला (*Fractional*) समीकरण हल करना हो, तो समीकरण के दोनों पक्षों के हरों (*Denominators*) का ल० स० (*L.C.M.*) निकाल कर इससे दोनों पक्षों को गुणा कर देते हैं, जिससे भिन्न दूर हो जाता है और इसके बाद समीकरण को हल कर लेते हैं।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. सरल करो—

(i) $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$ (60A)

(ii) $\frac{x}{a+b}+1=\frac{x}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}$ (57S, 60S)

(iii) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-6}$ (H.S. 61S)

(i) $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$

या, $\frac{a}{x-a}-\frac{a}{x-a-b}=\frac{b}{x-a-b}-\frac{b}{x-b}$

या, $a\left\{\frac{x-a-b-x+a}{(x-a)(x-a-b)}\right\}=b\left\{\frac{x-b-x+a+b}{(x-b)(x-a-b)}\right\}$

या, $\frac{-ab}{(x-a)(x-a-b)}=\frac{ab}{(x-b)(x-a-b)}$

या, $\frac{-1}{(x-a)(x-a-b)}=\frac{1}{(x-b)(x-a-b)}$

या, $\frac{-1}{x-a}=\frac{1}{x-b}$

या, $x-a=-(x-b)$

या, $2x=a+b, \quad \therefore \quad x=\frac{a+b}{2}$ उत्तर

(ii) $\frac{x}{a+b}+1=\frac{x}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}$

या, $\frac{x}{a+b}-\frac{x}{a-b}=\frac{a-b}{a+b}-1$

या, $x\left\{\frac{a-b-a-b}{(a+b)(a-b)}\right\}=\frac{a-b-a-b}{a+b}$

या, $\frac{-2bx}{(a+b)(a-b)}=\frac{-b}{a+b}$

या, $\frac{x}{a-b}=1, \quad \therefore \quad x=a-b$ उत्तर

(iii) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-6}$

या, $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-6}$

या, $\dfrac{x-2-x+3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{x+6-x+7}{(x-6)(x-7)}$

या, $\dfrac{1}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{x^2-13x+42}$

या, $x^2-5x+6=x^2-13x+42$

या, $-5x+13x=42-6$

या, $8x=36$

$\therefore \quad x=\dfrac{36}{8}=\dfrac{9}{2}=4\frac{1}{2},$ उत्तर

उदाहरण 2. सरल करो—

$$\frac{ax}{a+x}+\frac{bx}{b+x}=a+b \quad \text{(S.S. 67A)}$$

या, $\dfrac{ax(b+x)+bx(a+x)}{(a+x)(b+x)}=a+b$

या, $\dfrac{x^2(a+b)+2abx}{ab+x(a+b)+x^2}=(a+b)$

या, $x^2(a+b)+2abx=ab(a+b)+(a+b)^2x+x^2(a+b)$

या, $x^2(a+b)+2abx-x(a+b)^2-x^2(a+b)=ab(a+b)$

या, $-x(a^2+b^2)=ab(a+b)$

$\therefore \quad x=\dfrac{-ab(a+b)}{a^2+b^2}$ उत्तर

उदाहरण 3. सरल करो—

$$\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3 \quad \text{(62S, S.S. 68A)}$$

समीकरण को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है, जैसे—

$$\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=1+1+1$$

या, $\left\{\frac{x-a}{b+c}-1\right\}+\left\{\frac{x-b}{c+a}-1\right\}+\left\{\frac{x-c}{a+b}-1\right\}=0$

या, $\frac{x-a-b-c}{b+c}+\frac{x-a-b-c}{c+a}+\frac{x-a-b-c}{a+b}=0$

या, $(x-a-b-c)\left\{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right\}=0$

$\therefore$ $x-a-b-c=0$; या, $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=0$

$\therefore$ $x=a+b+c$, उत्तर

उदाहरण 4. सरल करो—

$$\frac{\mathbf{x-a(b+c)}}{\mathbf{bc}}+\frac{\mathbf{x-b(c+a)}}{\mathbf{ca}}+\frac{\mathbf{x-c(a+b)}}{\mathbf{ab}}=\mathbf{3}$$

समीकरण को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है, जैसे,

$$\frac{x-a(b+c)}{bc}+\frac{x-b(c+a)}{ca}+\frac{x-c(a+b)}{ab}=1+1+1$$

या, $\left\{\frac{x-a(b+c)}{bc}-1\right\}+\left\{\frac{x-b(c+a)}{ca}-1\right\}+\left\{\frac{x-c(a+b)}{ab}-1\right\}=0$

या, $\frac{x-(ab+bc+ca)}{bc}+\frac{x-(ab+bc+ca)}{ca}+\frac{x-(ab+bc+ca)}{ab}=0$

या, $\left\{x-(ab+bc+ca)\right\}\left\{\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right\}=0$

$$\therefore \quad x-(ab+bc+ca)=0; \text{ या, } \frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=0$$

$$\therefore \quad x= \quad ab+bc+ca, \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 5. सरल करो—

$$\frac{x-a^2}{b^2+c^2}+\frac{x-b^2}{c^2+a^2}+\frac{x-c^2}{a^2+b^2}=3$$

समीकरण को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है, जैसे—

$$\frac{x-a^2}{b^2+c^2}+\frac{x-b^2}{c^2+a^2}+\frac{x-c^2}{a^2+b^2}=1+1+1$$

$$\text{या'} \quad \left\{\frac{x-a^2}{b^2+c^2}-1\right\}+\left\{\frac{x-b^2}{c^2+b^2}-1\right\}+\left\{\frac{x-c^2}{a^2+b^2}-1\right\}=0$$

$$\text{या,} \quad \frac{x-a^2-b^2-c^2}{b^2+c^2}+\frac{x-a^2-b^2-c^2}{c^2+a^2}+\frac{x-a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2}=0$$

$$\text{या,} \quad \left\{x-(a^2+b^2+c^2)\right\}\left\{\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right\}=0$$

$$\therefore \quad x-(a^2+b^2+c^2)=0;$$

$$\text{या,} \quad \frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}=0$$

$$\therefore \quad x=a^2+b^2+c^2. \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 6. सरल करो—

$$\frac{ax-b^2+c^2}{c-b}+\frac{bx-c^2+a^2}{a-c}+\frac{cx-a^2+b^2}{b-a}=2(a+b+c)$$

या, $$\left\{\frac{ax-b^2+c^2}{c-b}-(c+b)\right\}+\left\{\frac{bx-c^2+a^2}{a-c}-(a+ ;\right\}$$
$$+\left\{\frac{cx-a^2+b^2}{b-a}-(b+a)\right\}=0$$

या, $$\frac{ax-b^2+c^2+b^2}{c-b}+\frac{bx-c^2+a^2-a^2+c^2}{a-c}$$
$$+\frac{cx-a^2+b^2-b^2+a^2}{a-b}=0$$

या, $$\frac{ax}{c-b}+\frac{bx}{a-c}+\frac{cx}{b-a}=0$$

या, $$x\left\{\frac{a}{c-b}+\frac{b}{a-c}+\frac{c}{b-a}\right\}=0$$

$\therefore$ $x=0$; या, $\frac{a}{c-b}+\frac{b}{a-c}+\frac{c}{b-a}=0$ उत्तर

उदाहरण 7. सरल करो—

$$\frac{\mathbf{x}-(\mathbf{b}^3+\mathbf{c}^3)}{\mathbf{a}^2-3\mathbf{bc}}+\frac{\mathbf{x}-(\mathbf{c}^3+\mathbf{a}^3)}{\mathbf{b}^2-3\mathbf{ca}}+\frac{\mathbf{x}-(\mathbf{a}^3+\mathbf{b}^3)}{\mathbf{c}^2-3\mathbf{ab}}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$$

समीकरण को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है, जैसे,

$$\left\{\frac{x-(b^3-c^3)}{a^2-3bc}-a\right\}+\left\{\frac{x-(c^3+a^3)}{b^2-3ca}-b\right\}$$
$$+\left\{\frac{x-(a^3+b^3)}{c^2-3ab}-c\right\}=0$$

या, $$\frac{x-a^3-b^3-c^3+3abc}{a^2-3bc}+\frac{x-a^3-b^3-c^3+3abc}{b^2-3ca}$$
$$+\frac{x-a^3-b^3-c^3+3abc}{c^2-3ab}=0$$

या, $\left\{x-(a^3+b^3+c^3-3abc)\right\}$

$$\left\{\frac{1}{a^2-3bc}+\frac{1}{b^2-3ca}+\frac{1}{c^2-3ab}\right\}=$$

$\therefore \quad x-(a^3+b^3+c^3-3abc)=0;$

या, $\frac{1}{a^2-3bc}+\frac{1}{b^2-3ca}+\frac{1}{c^2-3ab}=0$

$\therefore \quad x=a^3+b^3+c^3-3abc,$ उत्तर

उदाहरण 8. सरल करो—

$$\frac{p^2x+(l^3+m^3)}{l^2-lm+m^2}+\frac{q^2x+(m^3+n^3)}{m^2-mn+n^2}+\frac{r^2x+(n^3+l^3)}{n^2-nl+l^2}=2(l+m+n)$$

या, $\left\{\frac{p^2x+(l^3+m^3)}{l^2-lm+m^2}-(\ +m)\right\}$

$$+\left\{\frac{q^2x+(m^3+n^3)}{m^2-mn+n^2}-(m+n)\right\}+\left\{\frac{r^2x+(n^3+l^3)}{n^2-nl+l^2}(n+l)\right\}=0$$

या, $\frac{p^2x+l^3+m^2-l^3-m^3}{l^2-lm+m^2}+\frac{q^2x+m^3+n^3-m^3-n^3}{m^2-mn+n^2}$

$$+\frac{r^2x+n^3+l^3-n^3-l^3}{n^2-nl+l^2}=0$$

या, $x\left\{\frac{p^2}{l^2-lm-m^2}+\frac{q^2}{m^2-mn+n^2}\right.$

$$\left.+\frac{r^2}{n^2-nl+l^2}\right\}=0$$

$\therefore \quad x=0$; या, $\dfrac{p^2}{l^2-lm+m^2}+\dfrac{q^2}{m^2-mn+n^2}$

$+\dfrac{r^2}{n^2-nl+l^2}=0$ उत्तर

उदाहरण 9. सरल करो—

$$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-4}{x-5}+\frac{x-2}{x-3} \quad \text{(S.S. 54A)}$$

या, $\dfrac{x-1}{x-2}-1+\dfrac{x-5}{x-6}-1=\dfrac{x-4}{x-5}-1+\dfrac{x-2}{x-3}-1$

या, $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-6}=\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x-3}$

या, $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-6}$

या, $\dfrac{-3}{x^2-7x+10}=\dfrac{-3}{x^2-9x+18}$

या, $x^2-7x+10=x^2-9x+18$

या, $2x=8, \quad x=4,$ उत्तर

उदाहरण 10. सरल करो—

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}=0 \quad \text{(S.S. 54S)}$$

या, $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$

या, $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}$

या, $\dfrac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{x+4-x-3}{(x+3)(x+4)}$

या, $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x^2+7x+12}$

या, $x^2+3x+2=x^2+7x+12$

या, $4x=-10;\ x=\frac{-10}{4}=\frac{-5}{2}=-2\frac{1}{2}$ उत्तर

उदाहरण 11. सरल करो—

$$\frac{m(x+a)}{x+b}+\frac{n(x+b)}{x+a}=m+n \qquad \text{(S.S. 58A)}$$

या, $\left\{\frac{m(x+a)}{x+b}-m\right\}+\left\{\frac{n(x+b)}{x+c}-n\right\}=0$

$\left\{\frac{m(x+a)-m(x+b)}{x+b}\right\}+\left\{\frac{n(x+b)-n(x+a)}{x+a}\right\}$

या, $\frac{m(a-b)}{x+b}+\frac{n(b-a)}{x+a}=0$

या, $\frac{m(a-b)}{x+b}=\frac{n(a-b)}{x+a}$

या, $\frac{m}{x+b}=\frac{n}{x+a}$

या, $mx+am=nx+b_n$

या, $(m-n)x=bn-am$

$\therefore\ x=\frac{bn-am}{m-n}$, उत्तर

उदाहरण 12. सरल करो—

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-8} \qquad \text{(S.S. 59A)}$$

या, $\frac{x-4-x+2}{(x-2)(x-4)}=\frac{x-8-x+6}{(x-6)(x-8)}$

या, $\frac{-2}{x^2-6x+8}=\frac{-2}{x^2-14x+48}$

या, $x^2-6x+8=x^2-14x+48$

या, $8x=40$, $x=5$, उत्तर

उदाहरण 13. सरल करो—

$$\frac{2}{2x-3}+\frac{1}{x-3}=\frac{6}{3x-1} \quad \text{(S.S. 61A)}$$

$=\frac{2x-6+2x-3}{(x-3)(2x-3)}=\frac{6}{3x-1}$

या, $\frac{4x-9}{2x^2-9x+9}=\frac{6}{3x-1}$

या, $12x^2-54x+54=12x^2-31x+9$

या, $-23x=45$, $\therefore\ x=\frac{45}{28}=1\frac{17}{28}$ उत्तर

उदाहरण 14. सरल करो—

$$\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x-6}=\frac{8}{x+3} \quad \text{(S.S. 61S)}$$

या, $\frac{3x-18+5x-10}{(x-2)(x-6)}=\frac{8}{x+3}$

या, $\frac{8x-28}{x^2-8x+12}=\frac{8}{x+3}$

या, $8x^2+24x-28x-84=8x^2-64x+96$

या, $60x=180$, $x=3$, उत्तर

उदाहरण 15. सरल करो—

$$\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-6} \quad \text{(H.S. 61S)}$$

या, $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-6}$

या, $\dfrac{x-2-x+3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{x-6-x+7}{(x-6)(x-7)}$

या, $\dfrac{1}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{x^2-13x+42}$

या, $x^2-5x+6=x^2-13x+42$

या, $8x=36$, $\therefore$ $x=\dfrac{36}{8}=\dfrac{9}{2}=4\dfrac{1}{2}$, उत्तर

EXAMPLE 52

हल करो—

1. $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-3}{5}=3$ 2. $\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{x-5}{6}=\dfrac{x-3}{8}+2$

3. $\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{x-4}{5}=5$ 4. $\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{x+5}{6}=\dfrac{x-3}{12}+2\frac{2}{3}$

5. $\dfrac{5-3x}{4}+\dfrac{5x}{3}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{3-5x}{3}$

6. $\dfrac{15-\frac{2}{3}x}{5}-\dfrac{2x+5}{2}=\dfrac{17-\frac{14}{3}x}{3}$

7. $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{4}=x-9$ 8. $\dfrac{4x}{5}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{x}{5}+\dfrac{x}{4}$

9. $\dfrac{2x+1}{5}-\dfrac{3x-2}{6}=\dfrac{1}{2}$

10. $\dfrac{x+2}{7}+\dfrac{7-x}{4}=\dfrac{1}{2}(x-2)$

11. $\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{2x-3}{2}=x-\dfrac{5}{6}$

12. $\frac{x+5}{6}-\frac{x+1}{9}=\frac{x+3}{4}$

13. $\frac{2x-1}{5}-\frac{x+3}{2}=\frac{3x-5}{5}$

14. $\frac{4x-1}{3}-\frac{3x-4}{4}=6-\frac{3x+2}{2}$

15. $\frac{3}{2}(x-2)-\frac{2}{3}(x-3)=2+\frac{x+2}{4}$

16. $3x-\frac{x-1}{2}=24+\frac{2x-2}{5}$

17. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x-3}{4}=11$

18. $\frac{x+4}{3}-\left(\frac{3-7x}{11}+\frac{1}{2}\right)=x+\frac{1}{2}$

19. $\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{4}=\frac{2}{3}$

20. $\frac{a-x}{a}+\frac{2a-x}{2a}=\frac{3a-x}{3a}$

21. $\frac{2-x}{3}+\frac{3-x}{4}+\frac{4-x}{5}+\frac{5-x}{6}+\frac{3}{4}=0$

22. $\frac{x+5}{6}-\frac{x+1}{9}=\frac{x+3}{4}$ (C.U. 25)

23. $\frac{x}{2}-2=\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-1$ (C.U. 29)

24. $\frac{x+3}{4}-\frac{x+4}{9}=\frac{x+5}{6}-\frac{x+6}{7}$ (C.U. 17, 24)

25. $\frac{1}{5}[2-4\{x-5(x-7)\}]=\frac{1}{6}\{9-3(x-1)\}$

26. $\dfrac{\dfrac{7x}{3}-2}{4}-\dfrac{5x-\frac{1}{2}}{3}=\dfrac{x-8}{20}-3\frac{1}{3}$ (P.U. 19)

27. $\frac{1}{5}(x-5)+\frac{1}{3}(x-3)=\frac{1}{12}(5x-3)$ (P.U. 23)

28. $\dfrac{5}{7}(2x-11)-\dfrac{3}{4}(x-5)=\dfrac{x}{3}(10-x)$ (P.U. 36)

29. $\dfrac{7x-1}{4}-\dfrac{1}{3}\left(2x-\dfrac{1-x}{2}\right)=6\frac{1}{3}$ (P.U. 27)

30. $\dfrac{3x}{4}+\dfrac{1-2x}{5}=2\dfrac{1}{5}-\dfrac{x-\frac{1}{4}}{3}$ (P.U. 26)

31. $1{\cdot}2x+5={\cdot}4x+21$

32. $\dfrac{{\cdot}25x+{\cdot}125}{{\cdot}025}=\dfrac{{\cdot}5x+3{\cdot}25}{{\cdot}125}$

33. $\dfrac{x}{{\cdot}1}-\dfrac{1}{{\cdot}01}+\dfrac{x}{{\cdot}001}-\dfrac{1}{{\cdot}0001}=0$

34. ${\cdot}5x+\dfrac{{\cdot}02x+{\cdot}07}{{\cdot}03}-\dfrac{x+2}{9}=9{\cdot}5$ (C.U. 33)

35. $\dfrac{4{\cdot}05}{{\cdot}9x}+\dfrac{{\cdot}3}{{\cdot}8-2x}=\dfrac{1{\cdot}8}{x}-\dfrac{3{\cdot}6}{2{\cdot}4-6x}$ (C.U. 1881)

36. $\dfrac{{\cdot}2x-3}{{\cdot}6}+\dfrac{{\cdot}3x-{\cdot}8}{11}=\dfrac{4x+1{\cdot}5}{3{\cdot}3}+{\cdot}5$

37. $\dfrac{{\cdot}2x-{\cdot}9}{2{\cdot}7}+\dfrac{1{\cdot}9x}{1{\cdot}8}=\dfrac{4x-{\cdot}6}{8}+\dfrac{2{\cdot}5}{{\cdot}3}$

38. ${\cdot}65+\dfrac{{\cdot}585x-{\cdot}975}{6}=\dfrac{1.56}{{\cdot}2}-\dfrac{{\cdot}39x-{\cdot}78}{{\cdot}9}$

39. $\dfrac{3{\cdot}0x-1{\cdot}5}{{\cdot}75}-\dfrac{4{\cdot}0x-1{\cdot}3}{2{\cdot}6}=5{\cdot}3$ (C.U. 1882)

40. $\frac{\cdot 5x + 1\cdot 1}{\cdot 5} - \frac{\cdot 3x}{2\cdot 5} = \frac{\cdot 4x + 12}{5}$

41. $\frac{\cdot 4x + \cdot 3}{\cdot 9} + \frac{1\cdot 3x}{10\cdot 8} = \frac{\cdot 8x + 1\cdot 9}{1\cdot 8}$

42. $\frac{2x + \cdot 1}{\cdot 3} - \frac{\cdot 3x + \cdot 1}{\cdot 4} + \frac{\cdot 4x + \cdot 3}{\cdot 6} = \frac{\cdot 5x - \cdot 2}{1\cdot 2}$

43. $\frac{1\cdot 7 - \cdot 3x}{\cdot 5} - \frac{\cdot 4x - \cdot 2}{\cdot 3} = 5 - \cdot 6x + \frac{\cdot 7x + 1\cdot 4}{3}$

44. $\cdot 3x - \cdot 00\dot{5} = \cdot 0\dot{5}x + \cdot 0\dot{3}$

45. $\frac{6x + 8}{2x + 1} - \frac{2x + 38}{x + 12} = 1$

46. $\frac{x + a}{x - a} - \frac{x - b}{x + b} = \frac{2(a + b)}{x}$

47. $\frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x - 2} = \frac{2}{x - 7}$

48. $\frac{3x - 4}{x} + \frac{2}{4x - 3} = 3$

49. $\frac{x - 4}{x - 5} - \frac{x - 5}{a - 6} = \frac{x - 7}{x - 8} - \frac{x - 8}{x - 9}$

50. $\frac{4x + 3}{9} + \frac{7x - 29}{5x - 12} = \frac{8x + 19}{18}$

51. $\frac{6x + 13}{15} - \frac{3x + 5}{5x - 25} - \frac{2x}{5} = 0$

52. $\frac{x^2 - a^2}{x - a} + \frac{x^2 - b^2}{x - b} + \frac{x^2 - c^2}{x - c} = a + b + c - 3x$

53. $\frac{a - b}{x - a} + \frac{a - b}{x - b} = \frac{a}{x - a} + \frac{b}{x - b}$

54. $\frac{a}{x + a - c} + \frac{b}{x + b - c} = 2$

55. $\frac{6}{3x - 5} - \frac{1}{x - 5} = \frac{2}{2x - 5}$

सोलह

सरल समीकरण सम्बन्धी प्रश्नावली

(Problems on Simple Equation)

65. पन्द्रहवें अध्याय में बीजगणितीय समीकरण पर विचार किया जा चुका है। इस अध्याय में यह बतलाया जायगा कि उन समीकरणों को किस तरह अङ्कगणित सम्बन्धी व्यावहारिक सवालों को हल करने में प्रयोग किया जाता है। यदि कोई प्रश्न इस तरह का हो, जिसमें एक अज्ञात राशि का सम्बन्ध कुछ ज्ञात राशियों के साथ दिखलाया गया हो, तो समीकरण द्वारा अज्ञात राशि का मान मालूम किया जा सकता है जो निम्नलिखित साधित उदाहरणों से स्पष्ट हो जायगा।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. पिता और पुत्र की उम्र का योगफल 80 साल है और पुत्र की उम्र का दुगुना पिता की उम्र से 10 वर्ष अधिक है, तो दोनों की उम्र निकालो।

माना कि पिता की वर्त्तमान उम्र x साल है।

$\therefore$ पुत्र की वर्त्तमान उम्र $=(80-x)$ साल

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$$2(80-x)=x+10$$

या, $160-2x=x+10$

या, $-2x-x=10-160$

या, $-3x=-150$

$\therefore$ $x=50$

अतः पिता की उम्र $=50$ साल और पुत्र की उम्र $=80-50=30$ साल।

उदाहरण 2. दो मनुष्यों की उम्र में 16 वर्ष का अन्तर है तथा 15 वर्ष पहले बड़े की उम्र छोटे की उम्र से दुगुनी थी, तो उनकी वर्त्तमान उम्र क्या है ?

माना कि बड़े मनुष्य की वर्त्तमान उम्र $= x$ साल

$\therefore$ छोटे मनुष्य की वर्त्तमान उम्र $= x - 16$ साल

फिर, 15 वर्ष पहले बड़े मनुष्य की उम्र $= x - 15$ साल

तथा 15 वर्ष पहले छोटे मनुष्य की उम्र $= x - 16 - 15$ साल

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$$x - 15 = 2(x - 31)$$

या, $x - 15 = 2x - 62$

या, $x - 2x = -62 + 15$

या, $-x = -47$

$\therefore$ $x = 47$ साल

बड़े की उम्र $= 47$ साल तथा छोटे की उम्र $= 47 - 16 = 31$ साल ।

उदाहरण 3. A, B से कहता है, "मेरी उम्र तुम्हारी उस समय की उम्र से दुगुनी है जब मेरी उम्र जितनी तुम्हारी अब है, थी ।" उन दोनों की इस वक्त की उम्र मिलाकर 63 वर्ष है । तो दोनों की इस वक्त की उम्र बताओ । (61A)

माना कि A की वर्त्तमान उम्र $= x$ साल

$\therefore$ B की वर्त्तमान उम्र $= 63 - x$ साल

अतः दोनों की उम्रों का अन्तर $= x - (63 - x)$ साल

अतः $x - (63 - x)$ साल पहले B की उम्र

$$= [63 - x - \{x - (63 - x)\}]$$

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$$x = 2[63 - x - \{x - (63 - x)\}]$$

या, $x = 2[63 - x - x + 63 - x]$

या, $x = 2\{126 - 3x\}$

या, $x = 252 - 6x$

या, $x + 6x = 252$

या, $7x = 252$

$\therefore \quad x = \frac{252}{7} = 36$ साल

$\therefore \quad A$ की उम्र $= 36$ साल एवं B की उम्र $= 63 - 36 = 27$ साल।

उदाहरण 4. मोहन के पास कुछ चवन्नियाँ और अठन्नियाँ हैं जिनकी संख्या 71 और सब मिलाकर 26 रु० 75 पैसे के बराबर हैं, तो उनके पास कितनी अठन्नियाँ हैं ? (55 A)

माना कि मोहन के पास x अठन्नियाँ हैं।

$\therefore$ मोहन के पास $71 - x$ चवन्नियाँ हुईं।

फिर 26 रु० 75 पैसे $= 26 \times 4 + 3$ चवन्नियाँ

$= 104 + 3 = 107$ चवन्नियाँ

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$2x + 71 - x = 107$

या, $x + 71 = 107$

या, $x = 107 - 71 = 36$

अतः मोहन के पास 36 अठन्नियाँ हैं।

उदाहरण 5. 50 को दो हिस्सों में इस तरह बाँटो कि बड़े हिस्से का तिगुना 100 से उतना ही ज्यादा हो जितना छोटे हिस्से का पाँच गुणा 80 से कम हो। (P.U. 18)

माना कि बड़ा हिस्सा $= x$

$\therefore$ छोटा हिस्सा $= 50 - x$

फिर बड़े हिस्से का तिगुना अर्थात् $3x$, 100 से कितना ज्यादा है उसका माप $= 3x - 100$

और छोटे हिस्से का पाँच गुणा अर्थात् $5(50-x)$, 80 से कितना कम है उसका माप $= 80 - 5(50-x)$

∴ प्रश्नानुसार,

$$3x - 100 = 80 - 5(50-x)$$

या, $3x - 100 = 80 - 250 + 5x$

या, $-2x = 80 - 250 + 100$

या, $-2x = 180 - 250 = -70$

∴ $x = 35$

∴ बड़ा हिस्सा $= 35$ और छोटा हिस्सा $= 50 - 35 = 15$

उदाहरण 6. दो अङ्कोंवाली संख्या के अङ्कों का योगफल 5 है, और बायीं ओर के अङ्क में 1 जोड़ देने पर योगफल उस संख्या के आठवें हिस्से के बराबर हो जायगा। तो संख्या क्या है ?

माना कि संख्या की दहाई का अङ्क x है।

∴ संख्या की इकाई का अङ्क $= 5 - x$ है।

अत: वह संख्या $= 10x + 5 - x = 9x + 5$

∴ प्रश्नानुसार,

$$x + 1 = \frac{1}{8}(9x + 5)$$

या, $8x + 8 = 9x + 5$

या, $x = 3$

∴ संख्या की दहाई का अङ्क $= 3$ और इकाई का अङ्क $5 - 3 = 2$

∴ वह संख्या 32 है।

उदाहरण 7. दो अङ्कोंवाली किसी संख्या की दहाई के स्थान का अङ्क इकाई के स्थान के अङ्क से 5 बड़ा है; और उस संख्या में दोनों अङ्क के योगफल का पाँच गुणा घटाने से, संख्या के दोनों अङ्क उलट जाते हैं। तो संख्या बताओ।

माना कि संख्या का दहाई का अङ्क x है

$\therefore$ संख्या की इकाई का अङ्क $= x - 5$

अतः वह संख्या $= 10x + x - 5 = 11x - 5$

एवं उस संख्या का उलटा $= 10(x-5) + x = 11x - 50$

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$$11x - 5 - 5(x + x - 5) = 11x - 50$$

या, $11x - 5 - 10x + 25 = 11x - 50$

या, $x + 20 = 11x - 50$

या, $-10x = -70$

$\therefore$ $x = 7$

$\therefore$ संख्या की दहाई का अङ्क $= 7$ और इकाई का अङ्क $7 - 5 = 2$

$\therefore$ संख्या $= 72$.

उदाहरण 8. दो अङ्कों वाली किसी संख्या के अङ्कों का योगफल 5 है; और दहाई के स्थान के अङ्क के 10 गुने के साथ इकाई के स्थान के अङ्क का चौगुना जोड़ने पर संख्या के दोनों अङ्क उलट जाते हैं, तो संख्या निकालो।

माना कि संख्या की दहाई का अंक x है

$\therefore$ संख्या की इकाई का अंक $5 - x$

अतः संख्या $= 10x + 5 - x = 9x + 5$

और संख्या का उलटा $= 10(5 - x) + x = 50 - 10x + x = 50 - 9x$

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$$10x + 4(5 - x) = 50 - 9x$$

या, $10x + 20 - 4x = 50 - 9x$

या, $6x + 20 = 50 - 9x$

या, $15x = 30$

$\therefore$ $x = 2$

$\therefore$ संख्या की दहाई का अंक $= 2$ और इकाई का अंक $5 - 2 = 3$

$\therefore$ संख्या $= 23$

उदाहरण 9. एक संख्या में दो अंक हैं; जिनका जोड़ 12 है। अगर अंक उलट दिये जाते हैं; तो संख्या पहली संख्या का $\frac{4}{7}$ हो जाती है। तो पहली संख्या क्या है? (P.U. 38)

माना कि दहाई का अंक x है

$\therefore$ इकाई का अंक $= 12 - x$

$\therefore$ संख्या $= 10x + 12 - x = 9x + 12$

एवं उलटी संख्या $= 10(12 - x) + x = 120 - 9x$.

$\therefore$ प्रश्नानुसार, $120 - 9x = \frac{4}{7}(9x + 12)$

या, $840 - 63x = 36x + 48$

या, $-99x = -840 + 48 = -792$

$$\therefore \quad x = \frac{792}{99} = 8.$$

$\therefore$ संख्या की दहाई का अंक $= 8$ और इकाई का अंक $= 12 - 8 = 4$

अतः संख्या $= 84$.

उदाहरण 10. एक तीन अंकों की संख्या के बीच का अंक 0 है और बाकी दो अंकों का जोड़ 8 है। शुरू के अंक को आखिर में और आखिर के अंक को शुरू में रखने से जो संख्या बनती है, वह पहली संख्या से 198 ज्यादा है। तो वह संख्या क्या है? (C. U. 22)

माना कि संख्या के सैकड़ा का अंक x है

अतः संख्या की इकाई का अंक $8 - x$ होगा

और संख्या $= 100x + 10 \times 0 + 8 - x$

$= 99x + 8$

जब शुरू के अंक को आखिर में और आखिर के अंक को शुरू में रखेंगे तो संख्या $= 100(8 - x) + 10 \times 0 + x$

$= 800 - 99x$.

∴ प्रश्नानुसार,

$$800 - 99x = 99x + 8 + 198$$

या, $-198x = -800 + 206$

या, $-198x = -594$

∴ $x = \frac{594}{198} = 3$

∴ संख्या के सैकड़ा का अंक $= 3$

∴ संख्या की इकाई का अंक $= 8 - 3 = 5$

∴ संख्या $= 305$.

उदाहरण 11. चार लगातार संख्याओं का योग 1530 है, तो संख्याओं को ज्ञात करो।

माना कि,

पहली संख्या $= x$ है

∴ दूसरी संख्या $= x + 1$

तीसरी संख्या $= x + 2$

तथा चौथी संख्या $= x + 3$

प्रश्नानुसार,

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 1530$$

या, $4x + 6 = 1530$, या, $4x = 1524$

∴ $x = \frac{1524}{4} = 381$

∴ संख्याएँ $= 381, 382, 383, 384$

उदाहरण 12. तीन लगातार सम संख्याओं का योग 74 है, तो प्रत्येक संख्या को ज्ञात करो।

माना कि,

पहली सम संख्या $= 2x$

∴ दूसरी सम संख्या $= 2x + 2$

तथा तीसरी सम संख्या $= 2x + 2 + 2 = 2x + 4$

∴ प्रश्नानुसार,

$$2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 174$$

या, $6x + 6 = 174$

या, $x = \dfrac{174 - 6}{6} = \dfrac{168}{6} = 28$

∴ सम संख्याएं $= 56, 58, 60$

उदाहरण 13. तीन लगातार विषम संख्याओं का योग 369 है, तो प्रत्येक संख्या को ज्ञात करो।

माना कि,

पहली विषम संख्या $= 2x + 1$

∴ दूसरी विषम संख्या $= 2x + 1 + 2 = 2x + 3$

तथा तीसरी विषम संख्या $= 2x + 3 + 2 = 2x + 5$

∴ प्रश्नानुसार,

$$2x + 1 + 2x + 3 + 2x + 5 = 369$$

या, $6x + 9 = 369$

या, $x = \dfrac{369 - 9}{6} = 60$

∴ विषम संख्याएं $= 121, 123, 125$

उदाहरण 14. एक आदमी की उम्र उसके लड़के की उम्र की तिगुनी है। 15 वर्ष बाद वह लड़के की उम्र से दुगुनी उम्र का हो जायगा। बताओ दोनों की इस वक्त क्या उम्र है ? (P.U. 23)

माना कि आदमी की वर्त्तमान उम्र $= 3x$ साल

तो उसके लड़के की वर्त्तमान उम्र $= x$ साल

15 वर्ष बाद पिता की उम्र $= 3x + 15$ साल

लड़के की उम्र $= x + 15$ साल

∴ प्रश्नानुसार,

$$3x + 15 = 2(x + 15)$$

या, $3x + 15 = 2x + 30$.

या, $x = 30 - 15 = 15$ साल

∴ पिता की उम्र $= 45$ साल

एवं लड़के की उम्र $= 15$ साल

उदाहरण 15. एक कमरे की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 3 फीट अधिक है। उसकी लम्बाई 3 फीट बढ़ाने और चौड़ाई को 2 फीट घटाने से उनके क्षेत्रफल में कोई फर्क नहीं पड़ता। कमरे की लम्बाई और चौड़ाई बताइये। (S.S. 56S)

माना कि कमरे की चौड़ाई x फीट है
तो उस कमरे की लम्वाई $x + 3$ फीट
फिर उसकी लम्बाई 3 फीट बढ़ाने पर उसकी यथार्थ लम्बाई $(x + 3 + 3)$
और चौड़ाई 2 फीट घटाने पर यथार्थ चौड़ाई $x - 2$ फीट

∴ प्रश्नानुसार,

$$x(x + 3) = (x - 2)(x + 6)$$

या, $x^2 + 3x = x^2 + 4x - 12$

या, $x = 12$

∴ चौड़ाई $= 12$ फीट और लम्बाई $= 15$ फीट

EXAMPLE 53

1. A की उम्र B से 20 वर्ष अधिक है और दोनों की उम्र का जोड़ 70 वर्ष है तो A और B की उम्र बताओ।

2. वह कौन सी संख्या है जिसका पाँचवा हिस्सा छट्ठे हिस्से से 12 ज्यादा है।

3. 54·125 में जितने पौंड हैं उतने ही शिलिंग भी हैं तो प्रत्येक की संख्या निकालो। (54S, 58A)

4. एक घड़ी को 384 रु० में बेचने से कुछ हानि होती है और 408 रु० में बेचने से कुछ लाभ होता है, यदि लाभ हानि का आधा हो, तो घड़ी का क्रय मूल्य निकालो।

5. एक भले आदमी ने कुछ भिक्षुकों को 25 पैसे प्रति भिक्षुकों के हिसाब से दान दिया, तो उनकी थैली में केवल 30 पैसे बच गये। उन्होंने हिसाब करके देखा कि यदि उनके पास 60 पैसे और होते तो वे प्रत्येक भिक्षुक को 31 पैसे दे सकते थे। भिक्षुकों की संख्या बतओ। भले आदमी के पास कितने पैसे थे? (58S)

6. एक थैली में 3, 4 और 5 के अनुपात में रुपये, अठन्नियाँ और चवन्नियाँ हैं। यदि कुल सिक्कों का मूल्य 100 रु० हो, तो प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या बतलाओ।

7. 72 को ऐसे चार भागों में बाँटो कि पहले में 2 जोड़ने से, दूसरे में 2 घटाने से, तीसरे में 2 से गुणा करने पर तथा चौथे में 2 से भाग देने पर परिणाम बराबर हों।

8. दो लगातार सम संख्याओं (*Consecutive even numbers*) का जोड़ 134 है, तो उन संख्याओं को मालूम करो।

9. एक औरत ने कुछ अण्डे पैसे मे 2 और फिर उतने ही अण्डे पैसे में 3 के हिसाब से खरीदे। उसने कुल अण्डे को 2 पैसे में 5 के हिसाब से बेच डाला, जिससे उसे 4 पैसे की घटी लगी। बताओ, उसने कितने अण्डे खरीदे ?

10. अगर दो संख्याओं का जोड़ 252 है और उनका अन्तर 10 हो, तो उन संख्याओं को निकालें।

11. तीन लगातार पूरी संख्याओं (*Whole numbers*) का जोड़ 138 है, तो उन तीनो संख्याओं को निकालो ?

12. एक संख्या को 3 से गुणा करने से गुणनफल 15 से उतना ही ज्यादा होता है, जितनी वह संख्या 75 से छोटी है। बताओ, वह संख्या कौन सी है ?

13. किसी संख्या के चौगुने और 69 का जोड़ उस संख्या के 7 गुने के बराबर है, तो बताओ वह कौन सी संख्या है ?

14. राम के पास कुछ रुपये हैं। रहीम के पास राम से 25 रु० ज्यादा हैं। अगर दोनों के पास कुल 99 रु० हों तो बतलाओ हरएक के पास कितने रुपये हैं ?

15. एक आदमी की उम्र उसके लड़के की उम्र से 30 साल ज्यादा है; 5 साल पहले उस आदमी की उम्र लड़के की उम्र से चौगुनी थी। तो बताओ हरएक की उम्र क्या है ?

16. वह कौन सी संख्या है, जिसमें 180 जोड़कर 4 का भाग दें, तो भागफल संख्या का चौगुना हो जाय ?

17. 120 रु० को दो लड़कों में इस तरह बाँटो कि एक का पाँच गुना दूसरे के सात गुने के बराबर हो।

18. 460 रुपये को राम, मोहन और अहमद में इस तरह बाँटो कि राम को मोहन से 30 रु० ज्यादा और अहमद को राम से 40 रु० ज्यादा मिले।

19. महमूद की उम्र आलम से चौगुनी है। 7 वर्ष पहले दोनों की उम्र का जोड़ 101 वर्ष होता था। बताओ, अब महमूद की उम्र कितनी है ?

20. एक संख्या में दो अङ्क हैं। इकाई का अङ्क दहाई से तिगुना है। अगर अङ्क पलट दिये जायँ, तो बची संख्या असली संख्या से 36 ज्यादा हो जायगी। वह संख्या मालूम करो।

21. एक संख्या में दो अंक हैं। दहाई का अंक इकाई के अंक से 4 ज्यादा है। संख्या इकाई के अङ्क से 21 गुनी है। बताओ, वह कौन सी संख्या है ?

22. एक आदमी ने कुछ अण्डे खरीदे। उनमें से आधा एक पैसे में 2 और आधा एक पैसे में 3 के हिसाब से खरीद किये। उसने कुल अण्डों को 2 पैसे में 5 के हिसाब से बेचकर 1 पैसे का नुकसान उठाया। बताओ, उसने कितने अण्डे खरीदे ? (C.U. 1900)

23. एक आदमी अपने कर्ज की तिहाई से 200 रु० ज्यादा चुका देता है और उसे दिये हुए रुपये से 210 रु० देने को बचते हैं। बताओ, उसका कर्ज कितने का है ? (C.U. 31)

24. किसी चुनाव में A और B दो आदमी चुनाव के लिए खड़े हैं। वोटरों का $\frac{3}{8}$ A के लिए वोट देते हैं और A की B पर 200 वोट की जीत होती है। अगर $\frac{1}{3}$ वोटर किसी तरह वोट नहीं दिये हों, तो कुल वोटरों की संख्या बताओ। (A.U. 34)

25. 10 वर्ष पहले बाप की उम्र बेटे की उम्र की सातगुनी थी। 2 वर्ष बाद उसकी उम्र की दुगुनी उसके बेटे की उम्र की पाँचगुनी हो जायगी तो इस समय उनकी क्या उम्र है ? (C.U. 20)

26. 10 वर्ष बाद एक आदमी की उम्र उसके बेटे की उम्र की दुगुनी हो जायगी और 8 वर्ष पहले उसकी उम्र बेटे की उम्र की आठगुनी थी। तो इस समय उन दोनों की उम्र बताओ। (P.U. 27)

27. 5 वर्ष बाद एक आदमी की उम्र अपने लड़के की उम्र की तिगुनी हो जायगी और 5 वर्ष पहले बाप की उम्र बेटे की उम्र की सातगुनी थी। तो दोनों की इस समय की उम्र बताओ। (P.U. 32.)

28. एक आदमी की उम्र अपने तीन लड़कों की उम्र के जोड़ की चारगुनी है और 8 वर्ष में यह लड़कों की उम्रों के जोड़ की दूनी हो जायगी, तो उस आदमी की उम्र क्या है ? (P.U. 30)

29. A, B से कहता है— 'मेरी उम्र तुम्हारी उस समय की उम्र की दुगुनी है जब मेरी उम्र जितनी तुम्हारी अब है, थी।' उन दोनों की इस वक्त की उम्र मिलाकर 63 वर्ष है। तो दोनों की इस वक्त की क्या उम्र है ? (A.U. 31, 62A)

30. किसी संख्या का आधा इसके बाद की संख्या की तिहाई से 2 ज्यादा है, तो वह संख्या क्या है ? (57 A)

31. दो संख्याओं का योगफल 80 है, बड़ी संख्या छोटी संख्या के चारगुना से 5 अधिक है, तो दोनों संख्याओं को निकालो। (63S)

32. एक बाँस का $\frac{1}{4}$ हिस्सा कीचड़ में, $\frac{1}{3}$ हिस्सा पानी में और 10 फी० पानी के ऊपर है, तो बाँस की लम्बाई निकालो। (65 A)

33. मोहन के पास कुछ चवन्नियाँ और अठन्नियाँ हैं जिनकी संख्या 71 है। और सब मिलाकर 26 रु० 75 पैसे के बराबर हैं, तो उसके पास कितनी अठन्नियाँ हैं ? (55A)

34. दो मनुष्यों की उम्र में 16 वर्ष का अन्तर है तथा 15 वर्ष पहले बड़े की उम्र छोटे की उम्र से दुगुनी थी, तो उनकी वर्त्तमान उम्र क्या है ? (62 A)

35. तीन लगातार संख्याओं का जोड़ 1446 है, तो प्रत्येक संख्या को ज्ञात करो।

36. चार लगातार सम संख्याओं का जोड़ 1540 है, तो संख्याएं ज्ञात करो।

37. पाँच विषम संख्याओं का जोड़ 175 है, तो संख्याएं ज्ञात करो।

38. 20 वर्ष पहले पिता की उम्र पुत्र की उम्र से चौगुनी थी तथा 4 वर्ष बाद पिता की उम्र पुत्र की उम्र से दुगुनी हो जायगी। उनकी वर्त्तमान उम्र निकालिये।

39. पिता की वर्त्तमान उम्र पुत्र की उम्र से दुगुनी है। 8 वर्ष बाद उनकी उम्र सम्बन्ध 7 : 4 होगा, तो पुत्र की उम्र बताइये।

40. 4 वर्ष पहले पिता की उम्र पुत्र की उम्र की नौगुनी थी, किन्तु 8 वर्ष बाद यह तिगुनी हो जायगी। दोनों की वर्तमान उम्र मालूम करें।

41. पिता और उसके दो पुत्रों की वर्तमान उम्र 75 वर्ष है। 10 वर्ष के बाद पिता की उम्र पुत्रों की उम्र के योगफल के दुगुनी हो जायेगी, तो पिता की उम्र बताइये।

42. किसी आदमी की उम्र 24 साल की थी जब उसका सबसे बड़ा लड़का पैदा हुआ था। अगर दोनों साथ-साथ तबतक रहे जबकि पिता की उम्र अभी

को उम्र का दूना हो जाय, तो बेटा उस समय अभी की उम्र का 8 गुना हो जायेगा, तो पिता की वर्त्तमान उम्र निकालिये ।

43. आज से 5 साल पहले पिता की उम्र पुत्र की उम्र से तीन गुनी थी और आज से 5 साल बाद पिता की उम्र पुत्र की उम्र से दुगुनी हो जायगी तो पिता और पुत्र की आज की उम्र निकालिये । (S.S. 60A)

44. *A* की उम्र *B* से 20 वर्ष अधिक है और दोनों की उम्र का जोड़ 80 वर्ष है, तो *A* और *B* की उम्र बताओ ।

45. एक ऐसी संख्या बताओ जिसका पाँचवा हिस्सा छठे हिस्से से 5 ज्यादा हो ।

46. दो लगातार सम संख्याओं (*Consecutive even numbers*) का योग 186 है, तो उन संख्याओं को मालूम करो ।

47. 50 को दो हिस्सों में इस तरह बाँटो कि बड़े हिस्से का तिगुना 100 से उतना ही ज्यादा हो, जितना छोटे हिस्से का पाँच गुना 10 से कम हो । (P.U. 18)

48. एक 58 रु० 75 पैसे के बिल की चुकती रुपये और पच्चीस पैसे के सिक्कों में की गयी । कुल सिक्कों की संख्या एक सौ थी । बताओ, कितने रुपये के सिक्के दिये गये ।

49. एक आदमी ने एक घोड़े को 840 रु० में घाटा उठाकर बेच दिया । अगर वह 1050 रु० में बेचता तो उसे उस घाटे का $\frac{3}{4}$ नफा होता । बताओ, घोड़े की क्या कीमत थी ?

50. एक होटल में कुछ यात्री आकर ठहरे । अगर हर एक कमरे में एक-एक यात्री ठहरे, तो 10 आदमी बच जाते हैं । अगर हर एक कमरे में दो-दो यात्री ठहरें तो 2 कमरे बच जाते हैं । बताओ, कितने यात्री आकर ठहरे और उस होटल में कितने कमरे थे ?

51. एक संख्या में दो अंक हैं । दहाई का अंक 5 है और अंकों का योग संख्या के छठे हिस्से के बराबर है । बताओ, वह कौन सी संख्या है ?

52. एक संख्या में दो अंक हैं, इकाई का अंक दहाई के अंक से तिगुना है। अगर अंक पलट दिये जायँ तो नयी संख्या असली संख्या से 36 ज्यादा हो जायगी। वह संख्या मालूम करें।

53. 384 को दो हिस्सों में इस तरह बाँटो कि पहले हिस्से का 30% दूसरे हिस्से के 4% से 6 ज्यादा हो। (C.U. 1893)

54. एक संख्या का आधा इसके बाद की संख्या की तिहाई से 2 ज्यादा है, तो संख्या क्या है? (C.U. 1917)

55. एक आदमी ने दो किस्म की भेड़ें खरीदीं। दोनों किस्म की गिनती बराबर थी। पहली किस्म की भेड़ों को उसने फी भेड़ 6 रु० और दूसरी किस्म की भेड़ों को फी भेड़ 8 रु० में खरीदा। अगर दोनों किस्म की भेड़ों में बराबर-बराबर रुपये लगाता तो उसे तीन ज्यादा होतीं। बताओ, उसने हरएक किस्म की भेड़ कितनी-कितनी खरीदी? (C.U. 1898)

56. एक बोर्डिंग हाउस का मैनेजर जिसके पास 50 बोर्डर पहले से ही हैं, 10 बोर्डर और बढ़ जाते हैं, तो माहवारी खर्च 20 रु० बढ़ जाता है, लेकिन फी बोर्डर 1 रु० घट जाता है। बताओ कुल माहवारी ख़र्च क्या था?

57. एक आदमी को कुछ भिखमंगों के बीच कुछ रकम बाँटनी थी जिनमें से हर एक को 25 पैसे देने की इच्छा से अपनी रकम को गिना तो 10 पैसे कम पाया। फिर हर एक को 20 पैसे देने की इच्छा से गिना, तो 20 पैसे ज्यादा पाया। बताओ उसके पास कितनी रकम थी और वहाँ कितने भिखमंगे थे?

58. एक राजा ने जो 30 वर्ष की उम्र से ही गद्दी पर बैठा, अपनी जिन्दगी का $\frac{5}{11}$ राज्य किया, तो उसने कितने वर्षों तक राज्य किया।

59. एक संख्या में दो अंक हैं। दोनों का जोड़ 11 है और अगर बायीं तरफ के अंक में 2 जोड़ दिया जाय, तो वह अंक संख्या के $\frac{1}{8}$ के बराबर हो जाता है, तो उस संख्या को बताओ। (C.U. 1936)

60. 100 से छोटी संख्या के अंकों का जोड़ 6 है। अगर अंक उलट दिये जाते हैं, तो जो संख्या बनती है, वह पहली संख्या से 18 कम होती है, तो वह संख्या क्या है ? (C.U. 1925)

61. दो अंकों से बनी संख्या और अंकों के उलट देने से बनी संख्या का जोड़ 110 है और अंकों का फर्क 8 है, तो दोनों संख्या बताओ।

62. 60 को चार हिस्से में इस तरह बाँटो कि पहले हिस्से से अगर 3 घटा दिया जाय, दूसरे हिस्से में 11 जोड़ दिया जाय, तीसरे हिस्से को 4 से गुणा किया जाय और चौथे हिस्से में 2 से भाग दिया जाय, तो चारो के परिणाम बराबर हों।

———

सतरह

सरल एकघातीय समीकरण

(Simple Equation of the First Degree)

66. इसके पहले अध्याय पन्द्रह में आसान समीकरण को हल करने की रीति बतलायी गयी है। यहाँ पर हम एक घातवाले ऐसे सरल समीकरण को लेंगे जो पहले की अपेक्षा कुछ कठिन है। नीचे दिये गये साधित उदाहरणों से स्पष्ट होगा।

उदाहरण 1. हल करो— $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$ (60A)

$$\frac{a}{x-a}-\frac{a}{x-a-b}=\frac{b}{x-a-b}-\frac{b}{x-b}$$

या, $a\left\{\frac{x-a-b-x+a}{(x-a)(x-b)}\right\}=b\left\{\frac{x-b-x+a+b}{(x-b)(x-a-b)}\right\}$

या, $\frac{-ab}{(x-a)(x-a-b)}=\frac{ab}{(x-b)(x-a-b)}$

या, $\frac{-1}{x-a}=\frac{1}{x-b}$

या, $x-a=-(x-b)$

या, $2x=a+b$

$\therefore\quad x=\frac{a+b}{2}$

उदाहरण 2. हल करो— $\frac{a}{x+a-c}+\frac{b}{x+b-c}=2$ (62A)

दिये हुए समीकरण से,

$$\left(\frac{a}{x+a-c}-1\right)+\left(\frac{b}{x+b-c}-1\right)=0$$

या, $\left(\frac{a-x-a+c}{x+a-c}\right)+\left(\frac{b-x-b+c}{x+b-c}\right)=0$

या, $\frac{c-x}{x+a-c}+\frac{c-x}{x+a-c}=0$

या, $(c-x)\left\{\frac{x+b-c+x+a-c}{(x+a-c)(x+b-c)}\right\}=0$

या, $(c-x)\left\{\frac{2x+a-b-2c}{(x+a-c)(x+b-c)}\right\}=0$

या, $(c-x)(2x+a+b-2c)=0$

$\therefore$ या तो $c-x=0$ या $x=c$

या, $2x+a+b-2c=0$

$\therefore$ $x=\frac{2c-a-b}{2}$

उदाहरण 3. हल करो— $\frac{2}{2x-5}+\frac{1}{x-3}=\frac{6}{3x-1}$ (H.S. 64A)

दिये हुए समीकरण से,

$$\frac{2x-6+2x-5}{(x-3)(2x-5)}=\frac{6}{3x-1}$$

या, $\frac{4x-11}{2x^2-11x+15}=\frac{6}{3x-1}$

या, $12x^2-66x+90=12x^2-37x+11$

या, $-29x = 79$

$$\therefore \quad x = \frac{79}{29} = 2\frac{21}{29}$$

दूसरी विधि—उपर्युक्त प्रश्न को निम्नलिखित नियम से भी हल किया जा सकता है। दायें पक्ष के व्यंजक के हर के x वाले पद से बाँयें पक्ष के प्रत्येक व्यंजक के अंश को क्रमशः गुणा करो। फिर गुणनफल में उसी के हर के x वाले पद से भाग दो। जैसे—दिये हुए प्रश्न में दायें पक्ष के व्यंजक के हर के x वाले पद $3x$ से बायें पक्ष के प्रथम व्यंजक के अंश 2 को गुणा करने पर गुणनफल $6x$ प्राप्त हुआ। अब गुणनफल में उसी हर (बायें पक्ष के प्रथम व्यंजक का हर) के x वाले पद $2x$ से भाग देने पर भागफल 3 हुआ। उसी प्रकार $3x$ से बायें पक्ष के दूसरे व्यंजक के अंश 1 को गुणा करने पर गुणनफल $3x$ प्राप्त हुआ जिसमें उसी के हर के x वाले पद x से भाग देने पर 3 प्राप्त हुआ।

इस तरह 6 का अभीष्ट खंड $3+3$ हुआ।

दिये हुए समीकरण से,

$$\frac{2}{2x-5} + \frac{1}{x-3} = \frac{6}{3x-1}$$

या, $$\frac{2}{2x-5} + \frac{1}{x-3} = \frac{3}{3x-1} + \frac{3}{3x-1}$$

या, $$\frac{2}{2x-5} - \frac{3}{3x-1} = \frac{3}{3x-1} - \frac{1}{x-3}$$

या, $$\frac{6x-2-6x+15}{(2x-5)(3x-1)} = \frac{3x-9-3x-1}{(3x-1)(x-3)}$$

या, $$\frac{13}{2x-5} = \frac{-8}{x-3}$$

या, $13x-39 = -16x+40$

या, $13x+16x = 40+39$

या, $29x = 79$

$\therefore \quad x = \frac{79}{29} = 2\frac{21}{29}$

उदाहरण 4. हल करो— $\frac{6}{3x-5} - \frac{1}{x-5} = \frac{2}{2x-5}$ (H.S. 60 A)

दिये हुए समीकरण से,

$$\frac{6}{3x-5} = \frac{2}{2x-5} + \frac{1}{x-5}$$

या, $\frac{2}{2x-5} + \frac{1}{x-5} = \frac{3}{3x-5} + \frac{3}{3x-5}$

या, $\frac{2}{2x-5} - \frac{3}{3x-5} = \frac{3}{3x-5} - \frac{1}{x-5}$

या, $\frac{6x+10-6x+15}{(2x-5)(3x-5)} = \frac{3x-15-3x-5}{(3x-5)(x-5)}$

या, $\frac{5}{2x-5} = \frac{-10}{x-5}$

या, $5x - 25 = -20x + 50$

या, $25x = 75x \qquad \therefore \quad x = 3$

उदाहरण 5. हल करो— $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{3}{x-3}$ (H.S. 63S)

दिये हुए समीकरण से,

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-3}$$

या, $\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}\right) = \left(\frac{2}{x-3} - \frac{2}{x-2}\right) = 0$

या, $\frac{x-3-x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{2x-4-2x+6}{(x-2)(x-3)}$

या, $\frac{-2}{(x-1)(x-3)}=\frac{2}{(x-2)(x-3)}$

या, $\frac{-1}{x-1}=\frac{1}{x-2}$

या, $x-1=-x+2$

या, $2x=2+1$

$\therefore \quad x=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

उदाहरण 6. हल करो— $\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x-7}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-6}$

(H.S. 61S)

दिये हुए समीकरण से,

$$\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-6}$$

या, $\frac{x-2-x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{x-6-x+7}{(x-6)(x-7)}$

या, $\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{(x-6)(x-7)}$

या, $(x-6)(x-7)=(x-2)(x-3)$

या, $x^2-13x+42=x^2-5x+6$

या, $-8x=-36$

$\therefore \quad x=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$

उदाहरण 7. हल करो— $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-8}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-6}$ (59A)

दिये हुए समीकरण से,

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-8}$$

या, $\dfrac{x-4-x+2}{(x-2)(x-4)}=\dfrac{x-8-x+6}{(x-6)(x-8)}$

या, $\dfrac{-2}{(x-2)(x-4)}=\dfrac{-2}{(x-6)(x-8)}$

या, $(x-6)(x-8)=(x-2)(x-4)$

या, $x^2-14x+48=x^2-6x+8$

या, $-8x=-40$

$\therefore$ $x=5$

उदाहरण 8. हल करो— $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x-5}{x-6}=\dfrac{x-4}{x-5}+\dfrac{x-2}{x-3}$

(54A, H.S. 64S)

दिये हुए समीकरण से,

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}$$

या, $\dfrac{(x-1)(x-3)-(x-2)^2}{(x-2)(x-3)}$

$=\dfrac{(x-4)(x-6)-(x-5)^2}{(x-5)(x-6)}$

या, $\dfrac{x^2-4x+3-x^2+4x-4}{x^2-5x+6}$

$=\dfrac{x^2-10x+24-x^2+10x-25}{x^2-11x+30}$

या, $\dfrac{-1}{x^2-5x+6}=\dfrac{-1}{x^2-11x+30}$

या, $x^2-5x+6=x^2-11x+30$

या, $6x=24$

$\therefore$ $x=4$

दूसरी विधि—

$$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-4}{x-5}+\frac{x-2}{x-3}$$

दोनों तरफ 2 घटाने पर,

$$\frac{x-1}{x-2}-1+\frac{x-5}{x-6}-1=\frac{x-4}{x-5}-1+\frac{x-2}{x-3}-1$$

या, $\frac{x-1-x+2}{x-2}+\frac{x-5-x+6}{x-6}$

$$=\frac{x-4-x+5}{x-5}+\frac{x-2-x+3}{x-3}$$

या, $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-3}$

या, $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-6}$

या, $\frac{x-3-x+2}{(x-2)(x-3)}=\frac{x-6-x+5}{(x-5)(x-6)}$

या, $\frac{-1}{x^2-5x+6}=\frac{-1}{x^2-11x+30}$

या, $x^2-5x+6=x^2-11x+30$

या, $-5x+11x=30-6$

या, $6x=24$

$\therefore$ $x=4$

EXAMPLE 54

हल करो—

1. $\frac{10}{2x-5}+\frac{1}{x-5}=\frac{18}{3x-5}$

2. $\frac{5}{3-4x}+\frac{9}{4x+9}=\frac{4}{4x+5}$

3. $\frac{x-4}{x-1}+\frac{x-7}{x-3}+\frac{x-2}{x-9}=3$

4. $\frac{2x-1}{x-2}+\frac{4x-21}{x-6}=\frac{6x-26}{x+3}$

5. $\frac{4x^2+7}{2x-1}+\frac{6x^2-8x+11}{3x-1}=\frac{4x^2+3x+6}{x+1}$

6. $\frac{x-2}{x-3}+\frac{x-3}{x-4}=\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-4}{x-5}$

7. $\frac{x^2-5x+3}{x^2-6x+7}=\frac{x-5}{x-6}$

8. $\left(\frac{x-7}{x-6}\right)^2=\frac{(x-5)(x-9)}{(x-4)(x-8)}$

9. $\frac{m(x+a)}{x+b}+\frac{n(x+b)}{x+a}=m+n$ (58A)

10. $\frac{x+a}{x+b}=\left(\frac{2x+a+c}{2x+b+c}\right)^2$

11. $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3$ (S.S. 62S, 68A)

12. $\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}+\frac{x-ab}{a+b}=a+b+c$

13. $\frac{ax-a^2}{b+c}+\frac{bx-b^2}{c+a}+\frac{cx-c^2}{a+b}=a+b+c$

14. $\frac{x-a^2}{b+c}+\frac{x-b^2}{c+a}+\frac{x-c^2}{a+b}=4(a+b+c)$

15. $\frac{x-a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{x-b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{x-c^3}{a^2-ab+b^2}=2(a+b+c)$

16. $\frac{x+a^2+2bc}{b-c}+\frac{x+b^2+2ca}{c-a}+\frac{x+c^2+2ab}{a-b}=0$

17. $(x-2a)^3+(x-2b)^3=2(x-a-b)^3$

18. $\dfrac{x+4}{3x-8}=\dfrac{x+5}{3x-7}$

19. $\dfrac{6x+13}{15}-\dfrac{3x+5}{5x-25}=\dfrac{2x}{5}$

20. $\dfrac{6x+1}{15}-\dfrac{2x-4}{7x-16}=\dfrac{2x-1}{5}$

21. $\dfrac{x}{x+a-b}+\dfrac{x}{x+b-c}=2$

22. $\dfrac{15}{3x+11}-\dfrac{8}{3x+17}=\dfrac{7}{3x+5}$

23. $\dfrac{5}{3-4x}+\dfrac{9}{4x+13}=\dfrac{4}{4x+5}$ (64S)

24. $\dfrac{9}{3-7x}+\dfrac{1}{7x+15}=\dfrac{8}{12-7x}$

25. $\dfrac{b-c}{x+a}+\dfrac{a-b}{x+b}=\dfrac{a-c}{x+c}$

26. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+a}=\dfrac{2}{x+b}$ (63A)

27. $\dfrac{a-b}{x-a}+\dfrac{a-b}{x-b}=\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{b}{x-b}$ (63S)

28. $\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{4x+5}{4x+4}+\dfrac{3x+3}{3x+1}$

29. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{2x+13}{x+1}$ (H.S. 61S)

30. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}=0$

31. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+3}{x+4}=\frac{x+3}{x+2}+\frac{x+4}{x+5}$

32. $\frac{x-a^2}{b^2+c^2}+\frac{x-b^2}{c^2+a^2}+\frac{x-c^2}{a^2+b^2}=3$

33. $\frac{x+a}{b+c}+\frac{x+b}{c+a}+\frac{x+c}{a+b}=-3$

34. $\frac{x-a}{b+1}+\frac{x-b}{a+1}+\frac{x-1}{a+b}=3$

35. $\frac{bc(ax-1)}{b+c}+\frac{ca(bx-1)}{c+a}+\frac{ab(cx-1)}{a+b}=a+b+c$

36. $\frac{x-a(b+c)}{ba}+\frac{x-b(c+a)}{ca}+\frac{x-c(a+b)}{ab}=3$

37. $\frac{ax-b^2+c^2}{c-b}+\frac{bx-c^2+a^2}{a-c}+\frac{cx-a^2+b^2}{b-a}=2(a+b+c)$

[पदों से क्रमशः $b+c$, $c+a$, $a+b$ घटाओ]

38. $\frac{x+a^2+2c^2}{b+c}+\frac{x+b^2+2a^2}{c+a}+\frac{x+c^2+2b^2}{a+b}=0$

[पदों में $b-c$, $c-a$ और $a-b$ जोड़ो]

39. $\frac{6x^2+17x+7}{9x^2-3x-20}=\frac{3x+7}{3x-5}$

$\frac{x^2-5x+6}{4x^2-23x+15}=\frac{x-2}{7(x-[illegible]}$

41. $\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^2=\frac{(x-[illegible]-4)}{(x+2)(x+4)}$

42. $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2=\frac{x+2a+c}{x+2b+c}$

43. $\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3 = \frac{x-2a+b}{x+a-2b}$

44. $\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3 = \frac{a+x}{a-x}$

45. $(x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 = 3(x-a)(x-b)(x-c)$

46. $\frac{x+4}{(x+1)(x+3)} + \frac{x+7}{(x+1)(x+6)} + \frac{x+9}{(x+3)} = \frac{3}{x}$

47. $\frac{x+b+c}{(x+b)(x+c)} + \frac{x+c+a}{(x+c)(x+a)} + \frac{x+a+b}{(x+a)(x+b)} = \frac{3}{x}$

48. $\frac{4x-3a}{b+c} + \frac{4x-3b}{c+a} + \frac{4x-3c}{a+b} = 9$

49. $\frac{2x+a^2+2bc}{b-c} + \frac{2x+b^2+2ca}{c-a} + \frac{2x+c^2+2ab}{a-b} = 0$

50. $(x-23)^3 + (x-27)^3 = 2(x-25)^3$

51. $(x-15)^3 + (x-17)^3 = 2(x-16)^3$

52. $(2x-25)^3 + (3x-15)^3 = 5(x-8)^3$

53. $(5x-17)^3 - (2x+7)^3 = 3(x-8)^3$

54. $(x-8)^3 + (x-12)^3 = 2(x-10)^3$

55. $\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x-6} = \frac{8}{x+3}$ (61S)

56. $\frac{8}{2x-1} + \frac{9}{3x-1} = \frac{7}{x+1}$

57. $\frac{10}{2x-5} + \frac{1}{x+5} = \frac{18}{3x-5}$

58. $\frac{5}{3-4x} + \frac{9}{4x+9} = \frac{4}{4x+5}$.

59. $\frac{x-4}{x-1}+\frac{x-7}{x-3}+\frac{x-2}{x-9}=3$

60. $\frac{a}{x+a-c}+\frac{b}{x+b-c}=2$ (62A)

61. $\frac{6}{5-6x}+\frac{13}{6x+19}=\frac{7}{6x+7}$

62. $\frac{10}{5x-9}+\frac{14}{2x+7}=\frac{9}{x+8}$

63. $\frac{9}{3x-4}+\frac{20}{4x+1}=\frac{8}{x+7}$

64. $\frac{12}{3x-8}=\frac{20}{4x-13}-\frac{1}{x+9}$

65. $\frac{2}{2x-3}+\frac{1}{x-3}=\frac{6}{3x-1}$ (61A)

66. $\frac{b-c}{x+a}+\frac{a-b}{x+b}=\frac{a-c}{x+c}$

67. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$

68. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}=0$

69. $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-3}{x-3}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}$

70. $\frac{x+2}{x}-\frac{x-7}{x-5}-\frac{x+3}{x+1}=\frac{x-6}{x-4}$

71. $\frac{x}{x-2}-\frac{x+1}{x-3}=\frac{x-8}{x-6}-\frac{x-9}{x-7}$

72. $\frac{x+3}{x+6}-\frac{x+6}{x+9}=\frac{x+2}{x+5}-\frac{x+5}{x+8}$

73. $\dfrac{x+5}{x+4}-\dfrac{x-6}{x-7}=\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-15}{x-16}$

74. $\dfrac{x-7}{x-9}-\dfrac{x-9}{x-11}=\dfrac{x-13}{x-15}-\dfrac{x-15}{x+17}$

75. $\dfrac{x-4}{x-6}-\dfrac{x-6}{x-7}=\dfrac{x-7}{x-9}-\dfrac{x-8}{x-10}$

76. $\dfrac{2x-3}{x-2}+\dfrac{3x-20}{x-7}=\dfrac{x-3}{x-4}+\dfrac{4x-19}{x+5}$

77. $\dfrac{3x-8}{x-3}+\dfrac{4x-35}{x-9}=\dfrac{2x-9}{x-5}+\dfrac{5x-34}{x-7}$

78. $\dfrac{3x-13}{x-4}+\dfrac{4x-41}{x-10}=\dfrac{2x-13}{x-6}+\dfrac{5x-41}{x-8}$

79. $\dfrac{4x-17}{x-4}+\dfrac{10x-13}{2x-3}=\dfrac{8x-30}{2x-7}+\dfrac{5x-14}{x-1}$

80. $\dfrac{4x+21}{x+5}+\dfrac{5x-69}{x+4}=\dfrac{3x-5}{x-2}+\dfrac{6x-41}{x-7}$

81. $\dfrac{7x-55}{x-8}+\dfrac{2x-17}{x-a}=\dfrac{6x-71}{x-12}+\dfrac{3x-14}{x-5}$

82. $\dfrac{2x+11}{x+5}-\dfrac{9x-9}{3x-4}=\dfrac{4x+13}{x+3}-\dfrac{15x+47}{3x-10}$

83. $\dfrac{x-a}{b+1}+\dfrac{x-b}{a+1}+\dfrac{x-1}{a+b}=3$

84. $\dfrac{x^2+3x+7}{x^2+5x+9}=\dfrac{x+3}{x+5}$

85. $\dfrac{3x^2+5x+8}{5x^2+6x+12}=\dfrac{3x+5}{5x+6}$

86. $\dfrac{3x^2+13x-10}{2x^2-13x-7}=\dfrac{x+5}{x+7}$

87. $\dfrac{(x+4)(x+3)}{(x+2)(x+7)}=\dfrac{x+8}{x+10}$

88. $\left(\frac{x-13}{x+10}\right)^2=\frac{(x-11)(x-15)}{(x+8)(x+12)}$

89. $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2=\frac{x+2a+c}{x+2b+c}$ 90. $\left(\frac{x+7}{x+9}\right)^3=\frac{x+5}{x+11}$

91. $\left(\frac{x-6}{x-15}\right)^3=\frac{x-7}{x-4}$ 92. $\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3=\frac{a+x}{a-x}$

93. $\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3=\frac{x-2a+b}{x+a-2b}$ 94. $\frac{x+4a+b}{x+a+b}=\frac{4x+a+2b}{x+a-b}=5$

अठारह

वर्ग समीकरण

(Quadratic Equation)

67. जिन समीकरणों में अव्यक्त या अज्ञात राशि का वर्गात्मक या दूसरी घातवाला पद हो और उससे अधिक घातवाला कोई पद न हो, तो उसको वर्ग समीकरण *(Quadratic equation)* अथवा द्विघातीय समीकरण *(equation of the second degree)* कहते हैं।

जैसे $3x^2 = 27$ और $x^2 - 8x + 15 = 0$ वर्ग समीकरण के उदाहरण हैं।

68. वर्ग समीकरण के रूप—(Type of quadratic) equations)—

Quadratic equations (वर्ग समीकरण) दो तरह के हैं—

(i) शुद्ध वर्ग समीकरण (*Pure quadratic equation*)
(ii) मिश्रित वर्ग समीकरण (*Affected quadratic equation*)

धारा 67 में उदाहरण स्वरूप लिये गये वर्ग समीकरण को ध्यान से देखने पर पता चलेगा कि $3x^2 = 27$ एक ऐसा वर्ग समीकरण है जिसमें अज्ञात राशि का केवल वर्गवाला पद ही वर्त्तमान है और एक घातवाला पद वर्त्तमान नहीं है। फिर दूसरे वर्ग समीकरण $x^2 - 8x + 15 = 0$ को ध्यान से देखने पर यह ज्ञात होगा कि इसमें अज्ञात राशि के वर्गवाले पद के साथ ही साथ एक घातवाला पद भी वर्त्तमान है। इस प्रकार अगर वर्ग समीकरण को दो ऐसे खण्ड (*Class*) में बाँटा जाय कि एक खण्ड में उस प्रकार के वर्ग समीकरण आते हों जिनमें अज्ञात राशि का केवल वर्गवाला पद रहे और एक घातवाला

पद न रहे। फिर दूसरे खण्ड (*Class*) में उस प्रकार के वर्ग समीकरण आते हों जिनमें अज्ञात राशि के वर्गवाले पद के साथ ही साथ एक घात-वाला पद भी आवे। पहले प्रकार के खण्ड (*Class*) में जो वर्ग समीकरण आयेंगे वे शुद्ध वर्ग समीकरण (*Pure quadratic equation*) कहलाते हैं तथा दूसरे प्रकार के खण्ड में जो वर्ग समीकरण आयेंगे वे मिश्रित वर्ग समीकरण (*Affected quadratic equation*) कहलाते हैं।

अतएव यदि किसी वर्ग समीकरण में अज्ञात राशि का केवल वर्गवाला पद ही वर्त्तमान हो (एक घातवाला पद वर्त्तमान न हो) तो उसे "शुद्ध वर्ग समीकरण" (*Pure quadratic equation*) कहते हैं और जिसमें वर्ग वाले पद के साथ एक घातवाला पद भी वर्त्तमान हो, उसे "मिश्रित वर्ग समीकरण" (*Affected quadratic equation*) कहते हैं।

नोट— $ax^2+bx+c=0$ को व्यापक वर्ग समीकरण कहते हैं। अगर इस वर्ग समीकरण में $b=0$ हो, तो $ax^2+c=0$ को शुद्ध वर्ग समीकरण का व्यापक रूप कहते हैं।

समीकरण $ax^2+bx+c=0$ और $ax^2+bx=0$ दोनों मिश्रित वर्ग समीकरण के व्यापक रूप हैं।

69. शुद्ध वर्ग समीकरण को हल करना—

विधि—शुद्ध वर्ग समीकरणों को हल करने के लिए, सरल समीकरणों को हल करने की विधि के अनुसार अज्ञात राशि के वर्ग का मूल्य ज्ञात कर फिर उस मूल्य का वर्गमूल निकाल लेते हैं। ध्यान देने की बात यह होती है कि अज्ञात राशि के वर्गमूल के दो मूल्य, एक धनात्मक और दूसरा ऋणात्मक, होता है, क्योंकि—

$$a\times a=a^2$$

और $(-a)\times(-a)=a^2$

$\therefore$ a^2 का वर्गमूल $= +a$ या $-a$ दोनों सार्थक हैं।

अर्थात् a^2 का वर्गमूल $= \pm a$

शुद्ध वर्ग समीकरण का व्यापक रूप $ax^2 + c = 0$ पर विचार करो।

स्पष्टतः $ax^2 = -c$; या $x^2 = -\frac{c}{a}$; $\therefore x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

उदाहरण 1. $7(x^2 - 3) = 5(x^2 - 1)$ को हल करो।

या, $7x^2 - 21 = 5x^2 - 5$

या, $2x^2 = 16$

या, $x^2 = 8$; या, $x^2 = 4 \times 2$

$\therefore$ $x = \pm 2\sqrt{2}$

उदाहरण 2. $5(x^2 + 1) - 2 = 3(x^2 + 7)$ को हल करो।

या, $5x^2 + 5 - 2 = 3x^2 + 21$

या, $2x^2 + 3 = 21$

या, $2x^2 = 18$

या, $x^2 = 9$

$\therefore$ $x = \pm 3$

उदाहरण 3. $8x + \frac{7}{x} = \frac{65}{7}x$ को हल करो।

या, $\frac{8x^2 + 7}{x} = \frac{65x}{7}$

या, $(8x^2 + 7)\,7 = 65x^2$

या, $56x^2 + 49 = 65x^2$

या, $9x^2 = 49$

या, $x^2 = \frac{49}{9}$

$\therefore$ $x = \pm\frac{7}{3}$

उदाहरण 4. $\frac{2x^2+10}{15}=7-\frac{50+x^2}{25}$ को हल करो।

या, $\frac{2x^2+10}{15}=\frac{175-50-x^2}{25}$

या, $\frac{2x^2+10}{3}=\frac{125-x^2}{5}$

या, $10x^2+50=375-3x^2$

या, $13x^2=375-50=325$

$\therefore\ x^2=\frac{325}{13}=25$

$\therefore\ x=\pm5$

उदाहरण 5. सरल करो— $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{8}+\frac{8}{x}$ (59 A)

या, $\frac{x^2+4}{2x}=\frac{x^2+64}{8x}$; या, $x^2+4=\frac{x^2+64}{4}$

या, $4x^2+16=x^2+64$

या, $3x^2=48$; $\therefore\ x^2=16$; $\therefore\ x=\pm4$

EXAMPLE 55

हल करो—

1. $4x^2=64$
2. $2x^2=32$
3. $3x^2=27$
4. $a^2x^2=a^4$
5. $\frac{1}{7}x^2=28$
6. $(2x-3)^2=x^2-12x+57$
7. $8x+\frac{7}{x}=9\frac{2}{7}x$
8. $\frac{2+x}{2-x}+\frac{2-x}{2+x}=4\frac{1}{4}$
9. $\frac{x^2-1}{5}+\frac{1+2x^2}{3}=x^2$
10. $\frac{2x^2+1}{x^2-1}+\frac{9x^2-5}{x3^2-2}=5$

11. $\sqrt{(3x^2+4x-12)}=x+2$

12. $2(x^2-5)+x(3-x)=3(x+5)$

13. $(x-7)(x-10)+(x-3)(x-2)=(x-17)(x-5)$

14. $(x+a)^2-2a(a+x)=3a^2$

15. $x^2+2bx-b^2=a^2-b(b-2x)$

16. $2x(3x+5)-5x(x+2)=36$

17. $\dfrac{3x^2+15}{7}+\dfrac{2x^2+9}{3}=\dfrac{2x^2+87}{21}+2$

18. $\left(\dfrac{x^2-5}{x^2-7}\right)^2=\dfrac{x^2-10}{x^2-14}$

19. $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}+\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2x}$

20. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}+\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}=\dfrac{2x}{\sqrt{2x+1}-1}$

21. $(x+a)^{\frac{1}{3}}-(x-a)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}$

22. $(x+a)^{\frac{2}{3}}+(x-a)^{\frac{2}{3}}=3(x^2-a^2)^{\frac{1}{3}}$

23. $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=\frac{1}{2}$

24. $\sqrt{\{(1+x)^2-ax\}}=\sqrt{\{(1-x)^2+ax\}}=x$

25. $\dfrac{2x^2+10}{15}=7-\dfrac{50+x^2}{25}$

26. $2(x^2-5)+x(3-x)=3(x+30)$

27. $(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)=(x+8)+17$

28. $2x^2+x+1=x(x+1)+10$

29. $8x^2+5x+6=x(5-x)+87$

30. $2x^2-7x+12=x(x-7)+37$

31. $(2x-3)^2 = x^2 - 12x + 57$

32. $\frac{2+x}{2-x} + \frac{2-x}{2+x} = 4\frac{1}{4}$

70. मिश्रित वर्ग समीकरण को हल करना—

धारा 68 के नोट में $ax^2 + bx = 0$ और $ax^2 + bx + c = 0$ दोनों को ही मिश्रित वर्ग समीकरण का व्यापक रूप कहा गया है। अतः मिश्रित वर्ग समीकरण के दो व्यापक रूप के अनुसार ही इनको भिन्न-भिन्न रूपों में लेकर भिन्न-भिन्न विधियों से हल किया जा सकता है।

71. $ax^2 + bx = 0$ के रूपवाले मिश्रित वर्ग समीकरण को हल करना—

$\because \quad ax^2 + bx = 0$

या $\quad x(ax + b) = 0$

$\therefore$ या तो $x = 0$; या, $ax + b = 0$

अगर $ax + b = 0$, तो $x = \frac{-b}{a}$

अतः $x = 0$; या, $\frac{-b}{a}$

विधि निम्नांकित साधित उदाहरणों से स्पष्ट होगी।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. हल करो — $\frac{2}{x+1} + \frac{9}{x+3} = \frac{25}{x+5}$

$$\frac{2(x+3) + 9(x+1)}{x^2 + 4x + 3} = \frac{25}{x+5}$$

या, $$\frac{11x + 15}{x^2 + 4x + 3} = \frac{25}{x+5}$$

या, $25(x^2+4x+3)=(x+5)(11x+15)$

या, $25x^2+100x+75=11x^2+70x+75$

या, $14x^2+30x=0$

या, $x(7x+15)=0$

$\therefore$ या तो $x=0$; या, $7x+15=0$

अगर $7x+15=0$

$$\therefore \quad x=\frac{-15}{7}=-2\frac{1}{7}$$

$\therefore$ $x=0$; या $-2\frac{1}{7}$

उदाहरण 2. हल करो— $\dfrac{a}{x+a}+\dfrac{b}{x+b}=\dfrac{2c}{x+c}$

$$\frac{a(x+b)+b(x+a)}{x^2+x(a+b)+ab}=\frac{2c}{x+c}$$

या, $$\frac{x(a+b)+2ab}{x^2+x(a+b)+ab}=\frac{2c}{x+c}$$

या, $x^2(x+b)+2\,bx+(x+b)cx+2abc$
$=2cx^2+2(a+b)cx+2abc$

या, $x^2\{(a+b)-2c\}+x\{2ab-(a+b)c\}=0$

या, $x[x(a+b-2c)+\{2ab-(a+b)c\}]=0$

$\therefore$ या तो $x=0$;

या, $x(a+b-2c)+\{2ab-(a+b)c\}=0$

अगर $x(a+b-2c)+\{2ab-(a+b)c\}=0$

$$\therefore \quad x=\frac{(a+b)c-2ab}{a+b-2c}$$

$\therefore$ $x=0$; या, $\dfrac{(a+b)c-2ab}{a+b-2c}$

उदाहरण 3. हल करो— $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

या, $\frac{(x-a)^2+(x-b)^2}{x^2-x(a+b)+ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}$

या, $\frac{2x^2-2x(a+b)+a^2+b^2}{x^2-x(a+b)+ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}$

या, $2abx^2-2ab(a+b)x+ab(a^2+b^2)$
$=(a^2+b^2)x^2-(a+b)(a^2+b^2)x+ab(a^2+b^2)$

या, $x^2(a^2+b^2-2ab)-x(a+b)(a^2+b^2+2ab)=0$

या, $x\{(a-b)^2x-(a+b)(a+b)^2\}=0$

या, $x\{(a-b)^2x-(a+b)^3\}=0$

$\therefore$ या तो $x=0$; या, $(a-b)^2x-(a+b)^3=0$

अगर $(a-b)^2x-(a+b)^3=0$

$\therefore \quad x=\frac{(a+b)^3}{(a+b)^2}$

$\therefore \quad x=0$; या, $\frac{(a+b)^3}{(a-b)^2}$

उदाहरण 4. हल करो— $\frac{mx}{mx+a}+\frac{nx}{nx+a}=\frac{2px}{px+a}$

या, $\frac{mnx^2+max+mnx^2+nax}{mnx^2+ax(m+n)+a^2}=\frac{2px}{px+a}$

या, $\frac{2mnx^2+ax(m+n)}{mnx^2+ax(m+n)+a^2}=\frac{2px}{px+a}$

या, $2mnpx^3+ap(m+n)x^2+2mnax^2+a^2(m+n)x$
$=2mnpx^3+2ap(m+n)x^2+2a^2px$

या, $a\{p(m+n)+2mn\}x^2+a^2(m+n)x$
$=2ap(m+n)x^2+2a^2px$

या, $\{p(m+n)+2mn\}x^2 - xa\{(m+n)-2p\}$
$=0, \ (a0 \neq)$

या, $x[x\{p(m+n)+2mn\} - a\{m+n-2p\}]=0$

$\therefore$ या तो $x=0$;

या $x\{p(m+n)+mn\} - a(m+n-2p)=0$

अगर $x\{p(m+n)+mn\} - a(m+n-2p)=0$

$$\therefore \quad x=\frac{a(m+n-2p)}{p(m+n)+mn}$$

$$\therefore \quad x=0; \quad \text{या}, \ \frac{a(m+n-2p)}{p(m+n)+mn}$$

EXAMPLE 56

हल करो—

1. $\dfrac{3}{2x+3}+\dfrac{2}{3x+2}=\dfrac{2}{4x+1}$

2. $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{4}{x+4}+\dfrac{1}{x+1}$

3. $\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{4}{x+4}=\dfrac{5}{x+5}+\dfrac{2}{x+2}$

4. $\dfrac{1}{ax+d}+\dfrac{1}{bx+d}=\dfrac{2}{cx+d}$

5. $\dfrac{a-b}{x+a-b}+\dfrac{b-c}{x+b-c}=\dfrac{a+b}{x+a+b}-\dfrac{b+c}{x-b-c}$

6. $\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{1}{c-x}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$

7. $\dfrac{ax+b}{cx+b}+\dfrac{bx+a}{cx+a}=\dfrac{(a+b)(x+2)}{cx+a+b}$

8. $\dfrac{(x+a)(x+mb)}{(x-ma)(x-b)}=\dfrac{(mx+a)(x+b)}{(x-a)(mx-b)}$

9. $\sqrt{4x+1}-1=2\sqrt{-x}$

10. $3x-\dfrac{4x-3}{4x-1}=\dfrac{5-6x^2}{1-2x}-8$

11. $\sqrt{x}+\sqrt{[a-\sqrt{(ax+x^2)}]}=\sqrt{a}$

12. $\dfrac{\sqrt{4a^2-x^2}+\sqrt{4ax^2-x^3}}{\sqrt{4a^2-x^2}-\sqrt{4ax^2-x^3}}=\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}$

13. $\sqrt{x^2+bx+a^2}-\sqrt{x^2+ax+b^2}=a-b$

14. $x+\sqrt{(a^2+x^2-x\sqrt{(a^2+x^2)})}=a$

15. $\dfrac{a}{x+\sqrt{a-x^2}}+\dfrac{a}{x-\sqrt{a-x^2}}=x$

16. $\dfrac{(x+a)(x+b)}{(x+ma)(x+mb)}=\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-ma)(x-mb)}$

17. $(x+a)^3+(x-a)^3=(2x)^3$.

72. $ax^2+bx+c=0$ के रूपवाले मिश्रित वर्ग समीकरण को हल करना—

किसी भी मिश्रित वर्ग समीकरण को जो $ax^2+bx+c=0$ के रूप का हो, उसे दो प्रकार से हल किया जा सकता है।

(i) गुनणखंड निकालकर *(By factrisation)*

(ii) पूरा वर्ग करके *(By completing the square)*

(i) $ax^2+bx+c=0$ के रूपवाले मिश्रित वर्ग समीकरण को गुणनखंड निकालकर हल करना—

मिश्रित वर्ग समीकरणों को सरल करके और पदों का पक्ष बदल कर $ax^2+bx+c=0$ के रूप में प्रकट कर सकते हैं। अब प्राप्त बायें पक्ष के, यदि

उसके गुणनखंड निकाले जा सकते हों, तो प्रत्येक गुणनखंड को शून्य के बराबर मानकर सरल समीकरण को हल करने की विधि द्वारा अज्ञात राशियों के मूल्य निकाले जा सकते हैं। जैसे, मान लो कि $x-a$ और $x-\beta$, $ax^2+bx+c=0$ के दो गुणनखंड हैं, तो

$$(x-a)(x-\beta)=ax^2+bx+c=0$$

या, $(x-a)(x-\beta)=0$

$\therefore$ या तो $x-a=0$; या, $x-\beta=0$

अगर $x-a=0$, तो $x=a$

और यदि $x-\beta=0$, तो $x=\beta$

$\therefore$ $x=a$; या, β

विधि निम्नांकित साधित उदाहरणों से स्पष्ट होगी।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1 हल करो— $(2x-1)(3x+2)+(6x-1)=0$ (H.S. 60S)

या, $6x^2+x-2+6x-1=0$

या, $6x^2+7x-3=0$

या, $6x^2+9x-2x-3=0$

या, $3x(2x+3)-1(2x+3)=0$

या, $(3x-1)(2x+3)=0$

$\therefore$ या तो $3x-1=0$; या, $2x+3=0$

अगर $3x-1=0$; $\therefore$ $x=\frac{1}{3}$

अगर $2x+3=0$, $\therefore$ $x=-\frac{3}{2}=-1\frac{1}{2}$

$\therefore$ $x=\frac{1}{3}$; या, $-1\frac{1}{2}$

उदाहरण 2 हल करो— $4(x+2)(x-2)+(x+1)^2=1$ (H.S. 60A)

या, $4(x^2-4)+x^2+2x+1=1$

या, $4x^2-16+x^2+2x+1-1=0$

या, $5x^2+2x-16=0$

या, $5x^2+10x-8x-16=0$

या, $5x(x+2)-8(x+2)=0$

या, $(5x-8)(x+2)=0$

$\therefore$ या तो $5x-8=0$; या, $x+2=0$

अगर $5x-8=0$; $\therefore$ $x=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$

अगर $x+2=0$, $\therefore$ $x=-2$

$\therefore$ $x=1\frac{3}{5}$; या, -2

उदाहरण 3. हल करो— $(x+1)(3x+7)=15$ (H.S. 62S)

या, $3x^2+10x+7-15=0$

या, $3x^2+10x-8=0$

या, $3x^2+12x-2x-8=0$

या, $3x(x+4)-2(x+4)=0$

या, $(3x-2)(x+4)=0$

$\therefore$ या तो $3x-2=0$; या, $x+4=0$

अगर $3x-2=0$; $\therefore$ $x=\frac{2}{3}$

अगर $x+4=0$; $\therefore$ $x=-4$

$\therefore$ $x=\frac{2}{3}$; या, -4

उदाहरण 4. हल करो— $(x-1)(x+2)=10$ (H.S. 65S)

या, $x^2+x-2=10$

या, $x^2+x-12=0$

या, $x^2+4x-3x-12=0$

या, $x(x+4)-3(x+4)=0$

या, $(x-3)(x+4)=0$

$\therefore$ या, तो $x-3=0$; या, $x+4=0$

अगर $x-3=0$; $\therefore$ $x=3$

अगर $x+4=0;\quad \therefore\quad x=-4$

$\therefore\quad x=3;$ या, -4

उदाहरण 5. हल करो— $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x}\times\dfrac{25}{12}$ (H.S. 64A)

या, $\dfrac{x^2+(x+1)^2}{x^2+x}=\dfrac{25}{12}$

या, $\dfrac{2x^2+2x+1}{x^2+x}=\dfrac{25}{12}$

या, $24x^2+24x+12=25x^2+25x$

या, $x^2+x-12=0$

या, $x^2+4x-3x-12$

या, $x(x+4)-3(x+4)$

या, $(x-3)(x+4)=0$

$\therefore\quad x=3;$ या, -4

उदाहरण 6. हल करो—

$$\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+3}{x-3}=\frac{2(x+4)}{x-4}\quad \text{(H.S. 65A)}$$

या, $\dfrac{(x-3)^2+(x+3)^2}{x^2-9}=\dfrac{2x+8}{x-4}$

या, $\dfrac{2x^2+18}{x^2-9}=\dfrac{2x+8}{x-4}$

या, $2x^3-8x^2+18x-72=2x^3+8x^2-18x-72$

या, $16x^2-36x=0$

या, $4x(4x-9)=0\quad (4\pm0)$

$\therefore$ या तो $x=0;$ या, $4x-9=0$

अगर $4x-9=0;\quad \therefore\quad x=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$

$\therefore\quad x=0;$ या, $2\frac{1}{4}$

EXAMPLE 57

हल करो—

1. $x^2 - 2x + 3 = 1 + x$
2. $x^2 - 2x - 1155 = 0$
3. $(a+1)x^2 + 2ax + (a-1) = 0$
4. $(x-3)(x-4) = \frac{34}{33^2}$ (*Hints : put* $33 = a$)
5. $(x-1)(x-2) = \frac{63 \times 32}{31^2}$ (*Hints : put* $31 = a$)
6. $x^2 - x(a-c) + (a-b)(b-c) = 0$
7. $x^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)x + 1 = 0$
8. $x^2 - x - 6 = 0$
9. $2x^2 + x - 1 = 0$
10. $3x^2 - x - 2 = 0$
11. $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$
12. $(3 - 2\sqrt{2})x^2 + (\sqrt{2} - 1)x = 6$
13. $x^2 - 19x = 780$
14. $x^2 + x - 3660 = 0$
15. $13x^2 - 24x = 1309$
16. $19x^2 - 60x = 2431$
17. $x^3 - x^2 - 110x = 0$
18. $x^3 + 4x^2 - 192x = 0$
19. $(x-1)(x-2) = \frac{28}{27^2}$
20. $(x-2)(x-3) = \frac{87-44}{43^2}$
21. $(x+5)^2 = 2\,x+2)(5x+1)$
22. $x^2 - 7x + 12 = 0$
23. $x^2 - 12x + 20 = 0$
24. $2x^2 - 10x = 3x - 15$ (57A)
25. $5x^2 - x - 6 = 0$ (64S)
26. $x^2 + 9x - 52 = 0$ (65A)

27. $6x^2+5x-4=0$ (65S) 28. $35-4x=4x^2$

29. $3x^2-17x+24=0$ (61A, 68A)

30. $6x^2-23x-323=0$ (55A, 60A)

31. $12x^2+56x=255$ (55S)

32. $42x^2-41x-20=0$ (57S)

(ii) $ax^2+bx+c=0$ के रूपवाले मिश्रित वर्ग समीकरण को पूरा वर्ग करके हल करना—

धारा 72 (*i*) में बनाये गये प्रश्नो को एक दूसरी ही विधि से भी वनाया जा सकता है जिसे वर्ग पूरा करने *(Completing the square)* की विधि कहते हैं। पहले इस विधि के सामान्य *(General)* समीकरण को हल करके बतायेंगे। तब उसके बाद विशेष सवालों के साथ बतलायेंगे।

विधि—मान लो कि x में व्यापक वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ है।

$$\because \quad ax^2+bx+c=0$$

$$\therefore \quad ax^2+bx=-c$$

दोनों तरफ a (अर्थात् x^2 के गुणक) से भाग देने पर,

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

पुनः x के गुणक के $\left(\frac{b}{a}\right)$ के आधे $\left(\frac{b}{2a}\right)$ के वर्ग दोनों तरफ को जोड़ने पर,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

या, $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

या, $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

दूसरी रीति— $\because \; ax^2 + bx + c = 0$

अब दोनों तरफ $4a$ से गुणा करने पर,

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

अब दोनों तरफ b^2 जोड़ने पर,

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2$

या, $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\therefore \quad (2ax + b) = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$\therefore \quad 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

नोट—इस नियम को हिन्दू रीति कहते हैं। यह नियम प्रसिद्ध हिन्दू गणितज्ञ श्रीधर आचार्य का निकाला हुआ है।

विधि निम्नांकित साधित उदाहरणों से स्पष्ट होगी।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. हल करो— $(2x - 1)(3x + 2) + (6x - 1) = 0$ (H.S. 60S)

या, $6x^2 + x - 2 + 6x - 1 = 0$

या, $6x^2 + 7x - 3 = 0$

या, $x^2 + \frac{7}{6}x = \frac{1}{2}$

या, $x^2 + \frac{7}{6}x + \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{7}{12}\right)^2$

या, $\left(x+\frac{7}{12}\right)^2=\frac{1}{12}+\frac{49}{144}=\frac{121}{144}$

या, $x+\frac{7}{12}=\pm\frac{11}{12}$

या, $x=\frac{-7\pm11}{12}$

$\therefore\ x=-1\frac{1}{2};$ या, $\frac{1}{3}$

उदाहरण 2. हल करो— $4(x+2)(x-2)+(x+1)^2=1$ (H.S. 60A)

या, $4(x^2-4)+x^2+2x+1=0$

या, $5x^2+2x-16=0$

या, $x^2+\frac{2}{5}x=\frac{16}{5}$

या, $x^2+\frac{2}{5}x+\left(\frac{2}{10}\right)^2=\frac{16}{5}+\left(\frac{2}{10}\right)^2$

या, $\left(x+\frac{1}{5}\right)^2=\frac{16}{5}+\frac{1}{25}=\frac{81}{25}$

$\therefore\ x+\frac{1}{5}=\pm\frac{9}{5}$

$\therefore\ x=\frac{-1\pm9}{5}$

$\therefore\ x=-2;$ या, $1\frac{3}{5}$

उदाहरण 3. हल करो— $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-3}{x-4}=3\frac{1}{3}$ (H.S. 62A)

या, $\frac{2x^2-10x+10}{x^2-6x+8}=\frac{10}{3}$

या, $4x^2-30x+50=0$

या, $2x^2 - 15x + 25 = 0$

या, $x^2 - \frac{15}{2}x = -\frac{25}{2}$

या, $x - \frac{15}{2}x + \left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{-25}{2} + \left(\frac{15}{4}\right)^2$

या, $\left(x \frac{-15}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

या, $x \frac{-15}{4} = \pm\frac{5}{4}$

$\therefore \quad x = \frac{15 \pm 5}{4}$

$\therefore \quad x = 5$; या, $2\frac{1}{2}$

उदाहरण 4. हल करो— $x^2 - x + \frac{12}{x^2 - x} = 8$

मान लो $x^2 - x = a$, तो वर्ग समीकरण

$$a + \frac{12}{a} = 8$$

या, $a^2 + 12 = 8a$

या, $a^2 - 8a + 12 = 0$

या, $a^2 - 8a + (4)^2 = -12 + (4)^2$

या, $(a - 4)^2 = -12 + 16 = 4$

$\therefore \quad a - 4 = \pm 2$

$\therefore \quad a = 4 \pm 2$

$\therefore \quad a = 6$; या, 2

लेकिन $a = x^2 - x$

$\therefore \quad x^2 - x = 6,$

या, $x^2 - x + (\frac{1}{2})^2 = 6 + (\frac{1}{2})^2$

या, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

या, $x-\frac{1}{2}=\pm\frac{5}{2}$

$\therefore\quad x=\frac{1\pm5}{2}$

$\therefore\quad x=3;$ या, -2

पुन: $a=2$

या, $x^2-x=2$

या, $x^2-x+(\frac{1}{2})^2=2+(\frac{1}{2})^2$

या, $(x-\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}$

$\therefore\quad x-\frac{1}{2}=\pm\frac{3}{2},\quad\therefore\quad x=\frac{1\pm3}{2}$

$\therefore\quad x=2;$ या, -1

उदाहरण 5. हल करो —$abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$ (H.S. 68A)

दिये गये वर्ग समीकरण को व्यापक वर्ग समीकरण $(ax+bx+c=0)$ से तुलना करने पर स्पष्ट है कि,

$a=ab$

$b=-(a^2+b^2)$

और $c=ab$

$$\therefore\quad x=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2}}{2ab}$$

$$=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(a^2-b^2)^2}}{2ab}$$

$$=\frac{a^2b^2\pm(a^2-b^2)}{2ab}$$

'+' चिह्न लेने पर,

$$x = \frac{a^2 + b^2 + a^2 - b^2}{2ab} = \frac{2a^2}{2ab} = \frac{a}{b}$$

'−' चिह्न लेने पर,

$$x = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + b^2}{2ab} = \frac{2b^2}{2ab} = \frac{b}{a}$$

अतः $x = \frac{a}{b}$ या $\frac{b}{a}$

नोट—उपर्युक्त सारे प्रश्न को सूत्र $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ की सहायता से भी बना सकते हैं। दिये हुए वर्ग समीकरण को व्यापक वर्ग समीकरण से तुलना करके a, b एवं c का मान निकाल लो। फिर ऊपर दिये हुए सूत्र में a, b एवं c के मानों को भर दो। उत्तर मिल जायेगा।

जैसे उदाहरण 1 पर विचार करो—

उदाहरण 1 का वर्ग समीकरण, $(2x-1)\ (3x+2)+(6x-1)=0$ है जिसको हम $6x^2+7x-3=0$ लिख सकते हैं।

व्यापक वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ पर एवं इस वर्ग समीकरण $6x^2+7x-3=0$ पर विचार करो।

स्पष्टतः $a=6$, $b=7$ एवं $c=-3$ होगा।

$$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 6 \times (-3)}}{2-6}$$ (a, b एवं c के मानों को रखने पर)

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{12}$$

$$=\frac{-7\pm\sqrt{121}}{12}=\frac{-7\pm11}{12}$$

$\therefore\ x=-1\frac{1}{2};$ या $\frac{1}{3}$.

EXAMPLE 58

हल करो—

1. $8x^2-14x-15=0$ (54A, 61S)
2. $15x^2-28=x$ (64A, H.S. 63S)
3. $5x^2-17x+6=0$
4. $2x^2+3x-2=0$
5. $x^2-2x=3$
6. $x^2-4x=21$
7. $x^2-6x=72$
8. $x^2-3x+2=0$
9. $2x^2-x-1=0$
10. $4x^2-x-3=0$
11. $5x^2-2x-3=0$
12. $2x^2-3x+4=0$
13. $8x^2=x+7$
14. $19x=15-8x^2$
15. $21+8x^2=26x$
16. $8x^2-44x+20=0$
17. $15x^2-22x+8=0$
18. $20x^2=12-x$
19. $21x^2+22x+5=0$
20. $25x^2=5x+6$
21. $24x^2-7x-6=0$
22. $\frac{3x-8}{x-2}=\frac{5x-2}{x+5}$
23. $\frac{5x-7}{7x-5}=\frac{x-5}{2x-13}$
24. $\frac{3}{x-7}-\frac{4}{x-3}=\frac{5}{6}$
25. $\frac{4}{x-1}-\frac{5}{x+2}=\frac{3}{x}$
26. $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=2\frac{1}{2}$
27. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{2}{3}$
28. $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=5\frac{1}{5}$
29. $\frac{3}{x-1}-\frac{x-4}{x-3}=1$ (56S)

30. $\frac{x}{6}+\frac{1}{x}=\frac{x}{3}-\frac{5}{6}$

31. $\frac{x}{3}+\frac{2}{x}=3-\frac{8}{3x}$

32. $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{8}+\frac{8}{x}$ (59A)

33. $\frac{x}{3}+\frac{3}{6-x}=\frac{2(6+x)}{15}$ (64A)

34. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0$

35. $\frac{1+x}{1-x}-\frac{2+3x}{2-3x}=1+\frac{1+3x}{1-3x}$ (H.S. 62S)

36. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ (H.S. 61A)

37. $7x+\frac{3}{x}=35\frac{3}{5}$ (56A)

38. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}$ (59S)

39. $x^2+(a+b)x+ab=0$

40. $x^2-px=q$.

41. $8x^2=14x+15$

42. $5x^2+14x=55$

43. $3x^2-11x=20$

44. $3x^2+35=22x$

45. $5x^2+26x+24=0$

46. $35-4x=4x^2$

47. $3x^2+14x-49=0$

48. $25x=6x^2+21$

49. $5x^2=3x+21$

50. $8x^2+x=30$

51. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{2}{3}$

52. $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=5\frac{1}{5}$

53. $\frac{3}{x-5}+\frac{2x}{x-3}=5$

54. $\frac{2x}{x-4}+\frac{4x-3}{x+1}=9$

55. $\frac{2x-4}{3}+\frac{5}{2x-4}=\frac{8}{3}$

56. $\frac{2x+3}{x}+\frac{4x}{2x+3}=4$

57. $\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-4}{x+1}+\frac{1}{4}=0$

58. $\frac{x-6}{x+2}+\frac{x-10}{x+6}+2=0$

59. $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{10}{3}$

60. $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-2}{x-3}=6\frac{1}{3}$

61. $\frac{x}{3}+\frac{2}{x}=3-\frac{8}{3x}$

62. $8x+\frac{7}{x}=\frac{65x}{7}$

63. $\frac{2x+11}{x}=5-\frac{x-5}{3}$

64. $\frac{x}{3}+\frac{3}{6-x}=\frac{2(6+x)}{15}$

65. $\frac{2}{x+3}+\frac{x+3}{2}=\frac{10}{3}$

66. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{2x+1}{2x+2}$

67. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=0$

68. $\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-3}=\frac{4}{x-4}-\frac{5}{x-5}$

69. $x^2-x+\frac{12}{x^2-x}=8$ (संकेत : मान लो $x^2-x=a$)

70. $\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+3}{x-3}=\frac{2(x+4)}{x-4}$ (H.S. 65A)

—:o:—

उन्नीस

वर्ग समीकरण संबन्धी प्रश्नावली

(Problems leading to Quadratic Equations)

73. अभी तक विद्यार्थीगण केवल सरल समीकरण संबन्धी प्रश्नों से अवगत हुए हैं। इस अध्याय में विद्यार्थियों को वर्ग समीकरण संबन्धी प्रश्नों से अवगत कराया जायेगा। जानकारी के लिए निम्नांकित साधित उदाहरणों पर ध्यान आकृष्ट करें।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. किसी संख्या का चौगुना उसके व्युत्क्रम का 16 गुणा है, तो बतलाओ वह संख्या क्या है ?

माना कि संख्या x है।

तो इस संख्या का चौगुना $= 4x$

एवं इस संख्या के व्युत्क्रम का 16 गुणा $= \frac{16}{x}$

प्रश्नानुसार,

$$4x = \frac{16}{x}$$

या, $x^2 = 4$

$\therefore$ $x = \pm 2$

अतः संख्याएँ 2 अथवा -2 हैं।

उदाहरण 2. एक दो अंकों की संख्या में इकाई के स्थान का अंक दहाई के स्थान के अंक से 1 अधिक है; अगर संख्या अपने दोनों अंकों के गुणनफल के दुगुने से 5 अधिक हो तो संख्या बताओ।

मान लो कि संख्या की दहाई के स्थान का अंक x है; तो उसकी इकाई के स्थानका अंक $x+1$ होगा।

प्रश्नानुसार,

$$10x+(x+1)=2x(x+1)+5$$

$$10x+x+1=2x^2+2x+5$$

या, $2x^2-9x+4=0$

या, $2x^2-8x-x+4=0$

या, $2x(x-4)-1(x-4)=0$

या, $(2x-1)(x-4)=0$

$\therefore$ या तो $2x-1=0$; या, $x-4=0$

अगर $2x-1=0$; $\therefore$ $x=\frac{1}{2}$

अगर $x-4=0$; $\therefore$ $x=4$

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}$; या 4

लेकिन संख्या की दहाई के स्थान का अंक $\frac{1}{2}$ कभी भी नहीं होगा। वह केवल 4 ही हो सकता है। अतः संख्या की इकाई के स्थान का अंक 5 है। अतः संख्या 45 है।

उदाहरण. 3. एक बच्चों को पार्टी में प्रत्येक ने प्रत्येक को एक भेंट दी। यदि कुल 132 उपहार दिये गये हों, तो बालकों की संख्या बताओ।

मान लो कि बच्चों की संख्या x है।

इनमें से किसी एक बालक को चुन लो तो बाकी बालकों की संख्या $=x-1$

अब जो बालक चुना गया है, वह बालक $x-1$ बालकों को $x-1$ तरीके से उपहार दे सकता है अर्थात् एक बालक की अपेक्षा उपहार की संख्या $=x-1$

लेकिन पूरे बालकों की संख्या x है,

$\therefore$ उपहारों की कुल संख्या $=x(x-1)$

∴ प्रश्नानुसार,

$x(x-1)=132$

या, $x^2-x-132=0$

या, $x^2-12x+11x-132=0$

या, $x(x-12)+11(x-12)=0$

या, $(x-12)(x+11)=0$

∴ या तो $x-12=0$; या, $x+11=0$

अगर $x-12=0$; ∴ $x=12$

और अगर $x+11=0$; ∴ $x=-11$

लेकिन बालकों की संख्या ऋणात्मक नही हो सकती है।

अतः $x=12$

अतः बालको की संख्या 12 है

उदाहरण 4. दो लगातार विषम संख्याओं के वर्गों का जोड़ 802 है तो वे विषम संख्याएँ क्या हैं ? मालूम करो। (63A)

मान लो कि पहली विषम (*odd*) संख्या $=x$

∴ दूसरी विषम संख्या $=x+2$

∴ प्रश्नानुसार,

$x^2+(x+2)^2=802$

या. $2x^2+4x+4=802$

या, $2x^2+4x=798$

या, $x^2+2x=399$

या, $x^2+2x-399=0$

या, $x^2-19x+21x-399=0$

या, $x(x-19)+21(x-19)=0$

या, $(x-19)(x+21)=0$

∴ या तो $x-19=0$; ∴ $x=19$

या, $x+21=0$; ∴ $x=-21$

लेकिन कोई विषम संख्या = ऋणात्मक नहीं होती है।

$\therefore$ $x = 19$ तो $x + 2 = 21$

$\therefore$ दो क्रमागत विषम संख्याएं क्रमशः 19 और 21 हैं।

EXAMPLE 59

1. एक वर्ग के क्षेत्रफल का तिगुना, 9 मीटर लम्बे और 3 मीटर चौड़े एक आयत के क्षेत्रफल के चौगुने के समान है, तो वर्ग की एक भुजा की लम्बाई निकालो।
2. 10 मीटर लम्बी एक सरल रेखा को इस प्रकार दो हिस्से बनाओ कि पहले हिस्से के वर्ग के पँचगुने और दूसरे हिस्से के वर्ग का अंतर पहले हिस्से 20 गुने के के समान हो।
3. एक ऐसी संख्या बतलाओ जिसका वर्ग संख्या के 10 गुने से 96 अधिक है।
4. कोई संख्या 12 से जितनी अधिक है, उसके व्युत्क्रम का 39 गुना 4 से उतना ही कम है, तो बताओ कि संख्या क्या है ?
5. पिता और पुत्र की वर्त्तमान उम्र का अन्तर 25 है, 10 वर्ष पहले इन दोनों की उम्र सूचित करने वाली संख्याओं का गुणनफल 150 हो, तो पिता की वर्त्तमान उम्र क्या है ?
6. दो लगातार विषम संख्याओं (*odd numbers*) का गुणनफल 195 है, तो उन संख्याओं को मालूम करो।
7. यदि तीन लगातार विषम संख्याओं (*odd numbers*) के वर्गों का जोड़ 515 है, तो संख्याएं निकालो।
8. एक घड़ी जितने में खरीदी गयी, उतने ही प्रतिशत लाभ लेकर 96 रु० में बेच दी गयी। घड़ी का क्रय मूल्य निकलो।
9. एक आयताकार कमरे का क्षेत्रफल 280 वर्ग मीटर है। यदि उसकी लम्बाई 2 मीटर कम और चौड़ाई 2 मीटर अधिक होती है तो उसका क्षेत्रफल 8 वर्ग मीटर अधिक होता है। उसकी लम्बाई बताओ।

10. एक रेल गाड़ी 300 मीटर की दूरी समान चाल से तय करती है। यदि उसकी चाल 5 मीटर प्रति घंटे अधिक होती तो उसको वही दूरी चलने में 2 घंटे कम लगते। रेलगाड़ी की प्रति घंटा चाल बताओ।

11. 4 आदमी और 10 औरतें मिलकर किसी काम को 2 दिनों में खत्म करते हैं। यदि एक औरत पूरा काम करने में एक आदमी से 6 दिन अधिक लगाये तो एक आदमी उस काम को कितने दिन में कर सकता है ?

12. 20 को दो ऐसे भागों में बाँटो कि एक भाग का वर्ग दूसरे भाग के बराबर हो।

13. उस संख्या को बताओ जिसके चौथाई भाग का वर्ग उसके तिहाई के चार गुने से 4 अधिक है।

14. 17 को दो ऐसे भागों मे बाँटो कि एक भाग का वर्ग दूसरे भाग से 3 अधिक हो।

15. वह संख्या बताओ जो अपने व्युत्क्रम (*Reciprocal*) से $\frac{8}{3}$ अधिक है।

16. दो ऐसी लगातार संख्याएं बताओ कि उनके व्युत्क्रमों (*Reciprocals*) का अन्तर $\frac{1}{56}$ हो।

17. 30 को दो ऐसे भागों में बाँटो कि उनका गुणनफल 216 हो।

18. दो अकों की एक संख्या की इकाई का अंक उसके दहाई के अंक के वर्ग के बराबर है, अगर संख्या को उलट दिया जाता है तो नयी संख्या पहली संख्या से 18 अधिक है, संख्या बताओ।

19. दो अंकों की एक संख्या की इकाई का अंक उसकी दकाई के अंक से 3 अधिक है, अगर अंकों को गुणा किया जाता है तो गुणनफल संख्या से 15 अधिक है, तो संख्या बताओ।

20. एक आदमी जब अपनी चाल को 1 मील प्रति घंटा बढ़ा देता है तो 12 मील को तय करने में पहले की अपेक्षा 1 घंटा कम समय लगता है, तो आदमी की चाल बताओ।

बीस

संरल युगपत् समीकरण

(Simple Simultaneous Equation)

74. परिचय—निम्नलिखित दो समीकरण—

$$x - y = 3 \qquad \text{.........(i)}$$

और $2x - 3y + 4z = 0$ ....(ii)

पर विचार करने पर यह सूचित होता है कि समीकरण (i) में x और y दो अज्ञात राशियाँ वर्त्तमान हैं और यह साफ है कि इन दो अज्ञात राशियों के असंख्य मूल्यों द्वारा समीकरण सिद्ध हो सकता है। जैसे $x = 4$, $y = 1$, अथवा $x = 5$, $y = 2$; अथवा, $x = 6$, $y = 3$; अथवा $x = 7$, $y = 4$, अथवा $x = 8$, $y = 5$; अथवा $x = 1$, $y = -4$, $x = -2$, $y = -5$, आदि। फिर यदि x और y ऐसे हों कि $x + y = 7$ से समीकरण सिद्ध हो जाय तो ऊपर दी हुई भिन्न-भिन्न दो संख्याओं में से जिन दो संख्याओं का योगफल 7 होगा, उन्हीं को मालूम करना होगा। इसलिए यह देखा जाता है कि,

$$x - y = 3$$
$$x + y = 7$$

ये दोनों समीकरण x और y के एक ही मूल्य द्वारा एक साथ तभी सिद्ध हो सकते हैं जब $x = 5$ और $y = 3$ हो।

फिर समीकरण (ii) पर विचार करने पर यह सूचित होता है कि इस समीकरण में x, y और z तीन अज्ञात राशियों के असंख्य मूल्यों द्वारा समीकरण सिद्ध हो सकता है।

जैसे $x=1$, $y=2$ और $z=1$; अथवा $x=2$, $y=4$ और $z=2$ आदि।

फिर यदि x, y और z ऐसे हों कि समीकरण (iii) के साथ-साथ $7x+2y-6z=0$ और $4x+3y+z=37$ से भी समीकरण सिद्ध हो सकता है, तो ऊपर दी हुई भिन्न-भिन्न तीन संख्याओं में से जिन तीन संख्याओं के लिए, $7x+2y-6z=0$ और $4x+3y+z=37$ होगा, उन्हीं को मालूम करना होगा। इसलिए यह देखा जाता है कि,

$$2x-3y+4z=0$$
$$7x+2y-6z=0$$
$$4x+3y+z=37$$

ये तीनों समीकरण x, y और z के एक ही मूल्य द्वारा एक साथ तभी सिद्ध हो सकते हैं जब $x=2$, $y=8$ और $z=5$ हो।

ऊपर दिये हुए समीकरणों में से प्रत्येक समीकरण यदि उनमें दी हुई अज्ञात राशियों के एक मूल्य द्वारा एक साथ सिद्ध हों, तो उनको युगपत् समीकरण (*Simultaneous equations*) कहते हैं। समीकरणों में अज्ञात राशियों में से प्रत्येक राशि यदि एक घातवाली हो और समीकरणों में उनके दो अथवा दो से अधिक राशियों का गुणनफलवाला कोई पद न हो, तो समीकरणों को सरल अथवा एक घातवाले युगपत् समीकरण कहते हैं।

75. दो अज्ञात राशिवाले सरल युगपत् समीकरण (Simple simultaneous equations for two unknown).

पहले हम दो अज्ञात राशिवाले सरल युगपत् समीकरणों के विषय में विचार करेंगे। इस प्रकार के समीकरणों को हल करने की साधारण रूप से तीन रीतियाँ हैं जो नीचे दी जा रही हैं—

पहली रीति—दिये हुए समीकरणों में दो अज्ञात राशियों में से किसी एक का मूल्य दूसरी अज्ञात राशि द्वारा प्रकट करके, प्राप्त मूल्य को दूसरे समीकरण में रखो।

उदाहरण 1. हल करो—

$$3x - 7y = 0$$
$$x + y + 3 = 0 \qquad (63A)$$

पहले समीकरण से पाया जाता है कि,

$$3x = 7y$$
$$\therefore \quad x = \tfrac{7}{3}y$$

x के इस मूल्य को दूसरे समीकरण में रखने पर,

$$\tfrac{7}{3}y + y + 3 = 0$$

या, $7y + 3y + 9 = 0$

या, $10y + 9 = 0$

या, $y = \dfrac{-9}{10}$

$$\therefore \quad x = \frac{7}{3} \times \frac{-9}{10} \times \frac{-21}{10} = -2\frac{2}{10}$$

उदाहरण 2. हल करो—

$$x + 4y = 14$$
$$7x - 3y = 5$$

दूसरे समीकरण से, $7x = 5 + 3y$

$$\therefore \quad x = \frac{5 + 3y}{7}$$

पहले समीकण में x का मान रखने पर,

$$\frac{5 + 3y}{7} + 4y = 14$$

या, $5 + 3y + 28y = 98$

या, $31y = 93$

$\therefore \quad y = 3$

$$\therefore \quad x=\frac{5+3\times3}{7}=2.$$

दूसरी रीति—प्रत्येक समीकरण में अज्ञात राशियों में से किसी एक का मूल्य दूसरी अज्ञात राशि द्वारा प्रकट करके इस तरह प्राप्त मूल्यों को बराबर चिन्ह "=" द्वारा प्रकट करो।

उदाहरण 1. $3x-7y=0$ (63A)

$x+y+3=0$

पहले समीकरण से, $3x=7y$

$\therefore \quad x=\frac{7}{3}y$

दूसरे समीकरण से, $x=-3-y$

दोनों x के मूल्यों को बराबर करने पर,

$$\frac{7}{3}y=-3-y$$

या, $7y=-9-3y$

या, $10y=-9$

$$\therefore \quad y=\frac{-9}{10}$$

$$\text{और } x=\frac{7}{3}\times\frac{-9}{10}=\frac{-21}{10}=-2\frac{1}{10}$$

उदाहरण 2. $x+4y=14$

$7x-3y=5$

पहले समीकरण से, $x=14-4y$

दूसरे समीकरण से, $x=\frac{5+3y}{7}$

दोनों x के मूल्यों को बराबर करने पर,

$$\frac{5+3y}{7}=14-4y$$

या, $5+3y=98-28y$

या, $31y=93$

$\therefore \quad y=3$

और $x=\dfrac{5+3\times 3}{7}=2$

तीसरी रीति—दोनों समीकरणों को ऐसी दो संख्याओं द्वारा गुणा करो कि गुणा करने पर जो समीकरण प्राप्त हों उनमें अज्ञात राशियों में से किसी एक का गुणक दोनों में एक ही हों, तो इन दोनों समीकरणों को जोड़ने अथवा घटाने पर ऐसा समीकरण प्राप्त होगा जिसमें केवल एक अज्ञात राशि रहेगी।

उदाहरण 1. सरल करो—

$$3x-7y=0$$
$$x+y+3=0 \qquad (63A)$$

दूसरे समीकरण में 7 से गुणा करो और पहले में जोड़ो।

$$10x+21=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{-21}{10} -2\frac{1}{10}$$

पहले समीकरण में x का मूल्य रखने पर,

$$3\times\frac{-21}{10}-7y=0$$

$$\therefore \quad 7y=\frac{3\times 21}{10}$$

$$\therefore \quad y=\frac{3\times 21}{10\times 7}=\frac{9}{10}$$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. (i) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{5}{x}+2y=3\\[2mm] \dfrac{3}{x}+4y=4\dfrac{3}{5}\end{array}\right\}$ (H.S. 65A)

(ii) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{5x}+\dfrac{y}{9}=5\\[2mm] \dfrac{1}{3x}+\dfrac{y}{2}=14\end{array}\right\}$ (H.S. 63A, S.S. 65A)

(iii) $\left.\begin{array}{l}4x+\dfrac{3}{y}=9\\[2mm] 3x+\dfrac{6}{y}=8\end{array}\right\}$ (54S, 58S, 61S; H.S. 65S)

(iv) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{3}{x}-y=1\\[2mm] \dfrac{1}{x}-3y+5=0\end{array}\right\}$ (57A, 59S)

(i) समीकरण पहले को 2 से गुणा करने पर,

$$\frac{10}{x}+4y=6$$

$$\frac{3}{x}+4y=\frac{23}{5}$$

समीकरण (ii) में (i) घटाने पर,

$$\frac{1}{x}(3-10)=\frac{23}{5}-6$$

या, $$\frac{-7}{x}=\frac{-7}{5}$$

$\therefore\ x=5$

x का मान पहले समीकरण में रखने पर,

$$\frac{5}{5}+2y=3$$

या, $2y=2$

$\therefore\quad y=1$

$\therefore\quad x=5,\quad y=1$

(ii) पहले समीकरण को $\frac{1}{2}$ तथा दूसरे को $\frac{1}{3}$ से गुणा करने पर,

$$\frac{1}{10x}+\frac{y}{18}=\frac{5}{2}$$

और $\frac{1}{27x}+\frac{y}{18}=\frac{14}{9}$

(i) में (ii) घटाने पर, $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{27}\right)=\frac{5}{2}-\frac{14}{9}$

या, $\frac{1}{x}\left(\frac{27-10}{270}\right)=\frac{45-28}{18}$

या, $\frac{1}{x}\cdot\frac{17}{270}=\frac{17}{18}$

या, $\frac{1}{270x}=\frac{1}{18}$

$\therefore\quad x=\frac{18}{270}=\frac{1}{15}$

x का मान पहले समीकरण में रखने पर,

$$\frac{1}{5\times\frac{1}{15}}+\frac{y}{9}=5$$

या, $3+\frac{y}{9}=5$

या, $\frac{y}{9}=2$

$\therefore \quad y=18$

$\therefore \quad x=\frac{1}{15}, \quad y=18$

(iii) पहले समीकरण में 2 से गुणा करने पर,

$$8x+\frac{6}{y}=18$$

$$3x+\frac{6}{y}=8$$

$5x=10$ समीकरण (i) में (ii) घटाने पर,

$\therefore \quad x=2$

पहले समीकरण में x का मान रखने पर,

$$4\times 2+\frac{3}{y}=0$$

या, $\frac{3}{y}=9-8=1$

$\therefore \quad y=3$

$\therefore \quad x=2,\ y=3$

(iv) पहले समीकरण में 3 से गुणा करने पर,

$$\frac{9}{x}-3y=3$$

$$\frac{1}{x}-3y=-5$$

$\frac{1}{x}(9-1)=3+5$ समीकरण (i) में (ii) घटाने पर

या, $\frac{8}{x}=8$

$\therefore \quad x=1$

x का मान पहले समीकरण में रखने पर,

$3-y=1$

$\therefore \quad y=2$

$\therefore \quad x=1,\ y=2$

उदाहरण 2. (i) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=3$

$\frac{1}{2}x-y=1$ (59A)

(ii) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$

$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=12$ (H.S. 63S)

(iii) $\frac{3}{y}-\frac{1}{x}=1$

$\frac{2}{5x}+\frac{5}{2y}=7$ (65 S)

(iv) $\frac{4}{x}+\frac{10}{y}=2$ (56S, 60S)

$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}$

(i) दूसरे समीकरण में $\frac{1}{2}$ से गुणा करने पर,

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 3$$

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$$

जोड़ने पर, $x(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = 3 + \frac{1}{2}$

या, $\frac{7}{12}x = \frac{7}{2}$

$\therefore \quad x = 6$

अब x का मान समीकरण पहले में रखने पर,

$$6 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2}y = 3$$

या, $\frac{1}{2}y = 3 - 2 = 1$

$\therefore \quad y = 2$

$\therefore \quad x = 6, \quad y = 2$

(ii) पहले समीकरण को 2 से गुणा करने पर,

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 10$$

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12$$

$\frac{1}{x}(2 - 3) = 10 - 12$ समीकरण (i) में (ii) घटाने पर

या, $-\frac{1}{x} = -2$

$\therefore \quad x = \frac{1}{2}$

x का मान पहले समीकरण में रखने पर,

$$\frac{2}{\frac{1}{2}} + \frac{2}{y} = 10$$

या, $4 + \frac{2}{y} = 10$

या, $\frac{2}{y}=6$

$\therefore \quad y=\frac{1}{3}$

$\therefore \quad x=\frac{1}{2}, \quad y=\frac{1}{3}$

(iii) पहले समीकरण को $\frac{2}{3}$ से गुणा करने पर,

$$-\frac{2}{5x}+\frac{6}{5y}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5x}+\frac{5}{2y}=7$$

जोड़ने पर, $\frac{1}{y}\left(\frac{6}{5}+\frac{5}{2}\right)=\frac{2}{5}+7$

या, $\frac{1}{y}\left(\frac{12+25}{10}\right)=\frac{2+35}{5}$

या, $\frac{37}{10y}=\frac{37}{5}$

$\therefore \quad y=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

y का मान पहले समीकरण में रखने पर,

$$\frac{3}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{x}=1$$

या, $6-\frac{1}{x}=1$

या, $\frac{1}{x}=5$

$\therefore \quad x = \frac{1}{5}$

$\therefore \quad x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{1}{2}$

(iv) दूसरे समीकरण को 5 से गुणा करने पर,

$$\frac{4}{x} + \frac{10}{y} = 2$$

$$\frac{15}{x} + \frac{10}{y} = \frac{19}{4}$$

घटाने पर, $\frac{1}{x}(4 - 15) = 2 - \frac{19}{4}$

या, $-\frac{11}{x} = \frac{-11}{4}$

$\therefore \quad x = 4$

x का मान पहले समीकरण में रखने पर,

$$\frac{4}{4} + \frac{10}{y} = 2$$

या, $\frac{10}{y} = 1$

$\therefore \quad y = 10.$

$\therefore \quad x = 4, \quad y = 10.$

उदाहरण 3. हल करो—

$$4x + \frac{3}{y} = 9 \ldots \quad \ldots (i)$$

$$3x + \frac{6}{y} = 8 \ldots \quad \ldots (ii) \qquad \text{(54S, 58S, 61S)}$$

(i) को 2 से गुणा करने पर,

$$8x + \frac{6}{y} = 18 \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

इस (iii) में से (ii) को घटाने पर,

$$5x = 10, \quad \therefore \quad x = 2$$

x का मान (i) में रखने पर,

$$8 + \frac{3}{y} = 9$$

या, $\frac{3}{y} = 9 - 8 = 1$

$\therefore \quad y = 3$

अतः $x = 2, \; y = 3$

उदाहरण 4. हल करो—

$$\frac{3}{x} - y = 1$$

$$\frac{1}{x} - 3y + 5 = 0 \qquad \text{(59S)}$$

या, $\frac{3}{x} - y = 1$.... ....(i)

$\frac{1}{x} - 3y = -5$.... ....(ii)

(ii) को 3 से गुणा करने पर,

$\frac{3}{x} - 9y = 15$ ....(iii)

(i) में से (iii) को घटाने पर,

$8y = 16, \; y = 2$

y का मान (i) में रखने पर,

$$\frac{3}{x} - 2 = 1$$

या, $\frac{3}{x}=3$, $\therefore x=1$

$\therefore x=1, \quad y=2$

उदाहरण 5. हल करो—

$x+y=2xy, \ x-y=xy$ (61S)

$\because x+y=2xy$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$.... ....(i)

फिर $\because x-y=xy$

$\therefore \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1$.... ....(ii)

(i) और (ii) को जोड़ने पर,

$\frac{2}{y}=3$, $\therefore y=\frac{2}{3}$

y का मान (i) में रखने पर,

$\frac{2}{x}+\frac{2}{3}=2$

या, $\frac{1}{x}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore x=2$

$\therefore x=2, \quad y=\frac{2}{3}$

EXAMPLE 60

नीचे दिये हुए समीकरणों को हल करो—

1. $5x-8y=9$
   $13x+7y=79$

2. $2x+3y=32$
   $11y-9x=3$

3. $9x-4y=8$
   $13x+7y=101$

4. $x+ay=b$
   $ax-by=c$

5. $2x - \frac{1}{5}(y-3) = 4$
$3y + \frac{1}{5}(x-2) = 9$

6. $\frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{3}(2x+4)$
$\frac{1}{3}(x-y) = \frac{1}{2}(x-24)$

7. $\frac{1}{3}(x-y) = \frac{1}{4}(y-1)$
$\frac{1}{7}(4x-5y) = x-7$

8. $\frac{1}{2}(3x-2y) - 3 = \frac{1}{4}(2x-y)$
$\frac{1}{2}(5x-4y) - 3 = \frac{1}{3}(4x-3y)$

9. $\frac{1}{6}(2x+3y) + \frac{1}{3}x = 8$
$\frac{1}{2}(7y-3x) - y = 11$

10. $3x + 2y = 3$
$5x + 3y = 2$

11. $9x - 4y = 8$
$13x + 7y = 101$

12. $ax + by = c^2$
$x - y = c$ (H.S. 61A)

13. $5x + \frac{3}{y} = 4$
$3x + \frac{2}{y} = 5$ (H.S. 62A)

14. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2$
$\frac{5}{x} + \frac{10}{y} = 5\frac{5}{6}$ (55A, 60A)

15. $\frac{2}{x-2} + \frac{6}{y-3} = 5$
$\frac{5}{x-2} + \frac{4}{y-3} = 7$

16. $\frac{4}{x+y} + \frac{5}{x-y} = 3$
$\frac{6}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 2\frac{1}{4}$

17. $2x - \frac{1}{3}(2y-1) = 3\frac{5}{24} + \frac{1}{4}(3x-2y)$
$4y - \frac{1}{4}(5-2x) = 6 - \frac{1}{5}(3-2y)$

18. $\frac{x}{3} - \frac{2}{y} = 1$
$\frac{x}{4} + \frac{3}{y} = 3$

19. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{7}y = \frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{6}$

20. $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=5$

$x-y=4$

21. $2x+y=0$

$\frac{y}{2}-3x=8$

22. $\frac{5x}{6}-y=3$

$x-\frac{5y}{6}=8$

23. $\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=0$

$3x+\frac{y}{2}=17$

24. $\frac{x}{4}+\frac{2}{y}=2$

$\frac{2x}{5}+\frac{3}{2y}=2\frac{7}{20}$

25. $\frac{2}{x}+\frac{7}{y}=29$

$\frac{5}{x}-\frac{6}{y}=2$

26. $\frac{4}{x}+\frac{10}{y}=2$

$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}$ (56S, 60S)

27. $\frac{3}{2x}+\frac{2}{3y}=5$

$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$

28. $ax+by=c$

$a^2x+by^2=c^2$

29. $\frac{x+y}{2}+\frac{3x-5y}{4}=2$

$\frac{x}{14}+\frac{y}{18}=1$

30. $\frac{4x-3y-7}{5}=\frac{3x}{10}-\frac{2y}{15}-\frac{5}{6}$

$\frac{y-1}{3}+\frac{x}{2}-\frac{3y}{20}=\frac{y-x}{15}+\frac{x}{6}+\frac{11}{10}$

31. $\frac{9}{x}+\frac{8}{y}=7$ (H.S. 60S)
$3x+4y=3xy$

32. $\frac{4}{x}+\frac{7}{y}=27$
$3x+y=11xy$

33. $\frac{x+y}{xy}=2$ (61A, 62A, H.S. 64A)
$\frac{x-y}{xy}=1$

34. $x+y=5xy$
$2x+3y=12xy$

35. $2x+3y=13xy$
$3x+7x=27xy$

36. $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{y+2}=2$
$\frac{3}{x+1}+\frac{10}{y+2}=4$

37. $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+1=\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=23$ (64A)

38. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
$\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=1$

39. $\frac{x+a}{a}=\frac{y+b}{b}$
$ax-by=a^2-b^2$

40. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=m$
$\frac{b}{x}+\frac{a}{y}=n$

41. $2x+\frac{6}{y}=7$
$3x-\frac{2}{y}=8\frac{2}{3}$

42. $\frac{x}{4}+\frac{2}{y}=2$

$\frac{2x}{5}+\frac{3}{2y}=2\frac{7}{20}$

43. $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=3$

$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=4$

44. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2$

$\frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=\frac{1}{3}$

45. $\frac{1}{y}-\frac{1}{2x}=1$

$\frac{1}{4x}+\frac{1}{3y}=2$

46. $\frac{8}{x}-\frac{9}{y}=7$

$6\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=1$

47. $\frac{15}{x}-\frac{1}{y}=4$

$\frac{9}{x}+\frac{2}{y}=4$

48. $\frac{6}{x}+\frac{4}{y}=3$

$\frac{9}{x}-\frac{1}{y}=2\frac{3}{4}$

49. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{9}{10}$

$\frac{4}{x}+\frac{2}{y}=\frac{17}{15}$

50. $\frac{2}{x}+\frac{7}{y}=29$

$\frac{5}{x}-\frac{6}{y}=2$

51. $\frac{4}{x}+\frac{10}{y}=2$

$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}$

52. $\frac{3}{2x}+\frac{2}{3y}=5$

$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$

53. $\frac{4}{5}-\frac{3}{x}=9$

$2y-x=4xy$

54. $\frac{3}{x+y}+\frac{4}{x-y}=5$

$\frac{2}{x+y}+\frac{5}{x-y}=5\frac{2}{3}$

55. $\frac{5}{x+y}+\frac{2}{x-y}=3$

$\frac{3}{x+y}+\frac{1}{x-y}=1\frac{3}{5}$

56. $3x+20=4y-10$

$4(x-1)-3(y-3)=0$

57. $\frac{x-y}{3}=\frac{y-1}{4}$

$\frac{4x-y}{7}=x-7$

58. $\frac{x+y}{7}+\frac{y-x}{4}=2x-8$

$\frac{2y-3x}{3}+2y=2x+4$

59. $\frac{2x-y}{8}+\frac{1}{2}=\frac{7+x}{10}$

$\frac{3-4x}{6}+3=\frac{5y-7}{2}$

60. $\frac{x+1}{y+1}=\frac{3}{9}$

$\frac{x-1}{y-1}=\frac{2}{3}$

76. कुछ विशेष प्रकार के समीकरण (Some special types of equation).

उदाहरण 1. हल करो—

(i) $x+y=11$

$xy=28$

(ii) $x^2+y^2=41$

$xy=20$

(iii) $23x+41y=87$
$41x+23y=105$

(i) हम जानते हैं कि $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$
$=121-112$
$=9$
$\therefore \quad x-y=\pm 3$

अब $x+y=11$ और $x-y=3$ या -3

पहले $x-y=3$ लो,

दोनों समीकरण को जोड़ने पर,
$2x=14$
$\therefore \quad x=7$

घटाने पर, $2y=8$
$\therefore \quad y=4$
$\therefore \quad x=7,\ y=4$ जब $x-y=3$

अब $x-y=-3$ लो,

जोड़ने पर, $2x=8$
$\therefore \quad x=4$

घटाने पर, $2y=14$
$\therefore \quad y=7$
$\therefore \quad x=4,\ y=7$ जब $x-y=-3$
$\therefore \quad x=4$ या 7
$y=7$ या 4

(ii) $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$
$=41+2\times 20=41+40=81$
$\therefore \quad x+y=\pm 9.$

फिर $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$
$=41-2\times 20$

$$=1$$

$$\therefore \quad x-y=1$$

पहले दोनों का धनात्मक चिन्ह लेने पर,

$$x+y=9$$

$$x-y=1$$

जोड़ने पर, $2x=10$

$$x=5$$

घटाने पर, $2y=8$

$$\therefore \quad y=4$$

$$\therefore \quad x=5, \quad y=4 \qquad \text{....}(A)$$

अब दोनों का ऋणात्मक चिन्ह लेने पर,

$$x+y=-9$$

$$x-y=-1$$

जोड़ने पर, $2x=-10$

$$\therefore \quad x=-5$$

घटाने पर, $2y=-8$

$$\therefore \quad y=-4$$

$$\therefore \quad x=-5, \quad y=-4 \qquad \text{....}(B)$$

अब $x+y$ का धनात्मक एवं $x-y$ का ऋणात्मक चिन्ह लेने पर,

$$x+y=9$$

$$\therefore \quad x-y=-1$$

जोड़ने पर, $2x=8$

$$\therefore \quad x=4$$

घटाने पर, $2y=10$

$$\therefore \quad y=5$$

$$\therefore \quad x=4, \quad y=5 \qquad \text{....}(C)$$

अब $x+y$ का ऋणात्मक तथा $x-y$ का धनात्मक चिन्ह लेने पर,

$$x+y=-9$$
$$x-y=1$$

जोड़ने पर, $2x=-8$

$\therefore \quad x=-4$

घटाने पर, $2y=-10$

$\therefore \quad y=-5$

$\therefore \quad x=-4, \quad y=-5$ ....(D)

$\therefore \quad x=5, 4, -5, -4$

$y=4, 5, -4, -5$

(iii) दोनों को जोड़ने पर,

$$64x+64y=192$$

$\therefore \quad x+y \quad =3$ ....(A)

दोनों को घटाने पर,

$$18x-18y=18$$

$\therefore \quad x-y \quad =1$ ....(B)

दोनों A और B को जोड़ने पर,

$$2x=4$$

$\therefore \quad x=2$

घटाने पर, $2y=2$

$\therefore \quad y=1$

$\therefore \quad x=2, \quad y=1.$

EXAMPLE 61

हल करो—

1. $x+y=13$, $xy=40$
2. $x+y=12$, $xy=35$
3. $x-y=10$, $xy=75$
4. $x-y=4$, $xy=96$

5. $x^2+y^2=41$
   $xy=20$

6. $x^2+y^2=169$
   $xy=60$

7. $x+y=13$
   $x^2+y^2=97$

8. $x+y=23$
   $x^2+y^2=289$

9. $x-y=4$
   $x^2+y^2=58$

10. $x-y=9$
    $x^2+y^2=185$

11. $19x+25y=113$
    $25x+19y=107$

12. $21x+43y=343$
    $43x+21y=233$

13. $50x+31y=55$
    $31x+50y=188$

14. $27x-15y=63$
    $-15x+27y=21$

15. $67x+42y=43\frac{1}{3}$
    $42x+67y=47\frac{1}{2}$

16. $x+y=8$
    $xy=15$

17. $x-y=3$
    $xy=40$

18. $x+y=10$
    $xy=16$

19. $x+y=9$
    $xy=20$

20. $x-y=8$
    $xy=9$

21. $x-y=9$
    $xy=10$

22. $x-y=1$
    $xy=20$

77. तीन अज्ञात राशिवाले युगपत् समीकरण (Simultaneous equations for three unknown)—दो अज्ञात राशिवाले सरल युगपत् समीकरण हल करने की रीति बतलायी जा चुकी है। अब तीन अज्ञात राशिवाले युगपत् समीकरण हल करने की रीति पर विचार किया जायगा। इस सम्बन्ध में युगपत् समीकरण को हल करने का एक बहुत ही अच्छा तरीका है जिसे *Method of cross multiplication* कहते हैं। इसको नीचे दिया जाता है।

78. वज्राभ्यास नियम (Method of cross multiplication)

यदि $a_1x+b_1y+c_1z=0$ ....(i)

$a_2x+b_2y+c_2z=0$ ....(ii) हो, तो

सिद्ध करना होगा कि $\dfrac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\dfrac{z}{a_1b_2-a_2b_1}$

समीकरण (i) को c_2 और (ii) को c_1 से गुणा करने पर,

$$c_2a_1x+b_1c_2y+c_1c_2z=0$$

और $$c_1a_2x+b_2c_1y+c_1c_2z=0$$

अब घटाने पर,

$$x(c_1a_2-c_2a_1)+(b_2c_1-b_1c_2)y=0$$

या, $$(c_1a_2-c_2a_1)x=(b_1c_2-b_2c_1)y$$

$$\therefore \quad \frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1} \qquad \ldots .I$$

फिर समीकरण (i) को b_2 और (ii) को b_1 से गुणा करने पर,

$$a_1b_2x+b_1b_2y+b_2c_1z=0$$
$$a_2b_1x+b_1b_2y+b_1c_2z=0$$

अब घटाने पर,

$$(a_1b_2-a_2b_1)x+(b_2c_1-b_1c_2)z=0$$

या, $$(a_1b_2-a_2b_1)x=(b_1c_2-b_2c_1)z$$

$$\therefore \quad \frac{x}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{y}{b_1c_2-b_2c_1} \qquad \ldots .II$$

I और *II* से,

$$\frac{x}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{b_1c_2-b_2c_1}$$

नोट—समीकरणों को एक के नीचे दूसरे को लिखकर ऊपर दिये हुए सिद्धांत को बहुत आसानी से याद रखा जा सकता है।

$$a_1x+b_1y+c_1z=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0$$

इससे मालूम होता है कि,

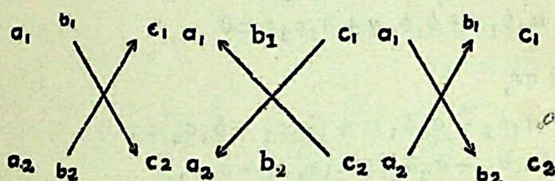
(i) x के नीचे जो व्यंजक है, वह = (पहले समीकरण के y के गुणक × दूसरे समीकरण के z के गुणक) – (दूसरे समीकरण के y के गुणक × पहले समीकरण के z के गुणक);

(ii) y के नीचे जो व्यंजक है, वह = (पहले समीकरण के z के गुणक × दूसरे समीकरण के x के गुणक) – (दूसरे समीकरण के z के गुणक × पहले समीकरण के x गुणक);

(iii) z के नीचे जो व्यंजक है, वह = (पहले समीकरण के x गुणक × दूसरे समीकरण के y के गुणक) – (दूसरे समीकरण के x के गुणक × पहले समीकरण के y के गुणक);

सांकेतिक रूप से इसे नीचे की विधियों से याद किया सकता है—

पहले x, y, z के गुणकों को क्रम से सजाकर रखो।



अब x के नीचे हर का पद क्या होगा, वह इस तरह निकाला जा सकता है। दोनों व्यंजकों x, a_1 और a_2 के साथ है, अतः a_1 और a_2 को छोड़ दो। a_1 के आगे b_1 मिलता है। b_1 को *Diagonally* c_2 से गुणा करो और फिर b_2 को c_2 से गुणा करो। पहले गुणनफल को दूसरे गुणनफल से घटा दो। परिणाम होगा $b_1c_2 - b_2c_1$, यह x के नीचे हर का व्यंजक होगा। उसी तरह y और z के नीचे हरों का व्यंजक निकाला जाता है। याद रहे हमेशा ऊपर वाले पद क्रम a_1, b_1, c_1 से आगे बढ़ते हैं।

उपसूत्र—ऊपर दिये हुए समीकरणों में यदि z के बदले 1 लिया जाय तो,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{c_1b_2 - a_2b_1}$$ प्राप्त होगा।

और, इससे $a_1x + b_1y + c_1 = 0$
और $a_2x + b_2 + c_2 = 0$

दोनों युगपत् समीकरणों के मूल (*Root*) अर्थात् x और y के मूल्य निकाले जा सकते हैं।

नोट—ऊपर के दिये हुए नोट के सिद्धांतों को पूर्ण रूप से याद रखना चाहिए। इसके द्वारा केवल दो अज्ञात राशि वाले युगपत् समीकरण ही आसानी से और अच्छे रूप से हल नहीं किये जा सकते, बल्कि तीन अज्ञात राशिवाले समघाती युगपत् समीकरणों को हल करने में भी यही लागू होते हैं।

साधित उदाहरण

उदाहरण—1. हल करो—

$$3x - 115 - 4 = 0$$
$$5x - 12y - 13 = 0$$

यहाँ $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ b_1 = -11,\ b_2 = -12$ और
$c_1 = -4,\ c_2 = -13$

अत:
$$\frac{x}{(-11)(-13) - (-12)\times(-4)}$$
$$= \frac{y}{(-4)\times 5 - (-13)\times 3} = \frac{1}{3\times(-12) - 5(-11)}$$

या, $$\frac{x}{143 - 48} = \frac{y}{-20 + 39} = \frac{1}{-36 + 55}$$

या, $$\frac{x}{95} = \frac{y}{19} = \frac{1}{19}$$

$$\therefore \quad x = \frac{95}{19}, \quad y = \frac{19}{19}$$

या, $x = 5, \quad y = 1$

79. इस सिद्धांत का तीन अज्ञात राशि वाले समघाती युगपत् समीकरण का मूल्य ज्ञात करने में प्रयोग—

समीकरण (i) और (ii) को *Cross multiplication* के कायदे से हल करने पर,

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_2}=k(\text{मान लो})$$

$$\therefore \quad x=k\,(b_1c_2-b_2c_1)$$
$$y=k\,(c_1a_2-c_2a_1)$$
$$z=k\,(a_1b_2-a_2b_1) \qquad \text{....(iv)}$$

फिर x, y और z के इन मानों को (iii) में रखने से   का मान मालूम हो जाता है। अन्त में (iv) में k का मान रखने से x, y, z का मान मालूम हो जाता है।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. हल करो—

(i)
$$6x+6y+8z=0$$
$$3x+4y+6z=0$$
$$2x+5y+z+10=0$$

(ii)
$$2x-3y+4z=0$$
$$7x+2y-6z=0$$
$$4x+3y+z=37$$

(i) पहले दोनों समीकरणों से,

$$\frac{x}{6\times6-6\times8}=\frac{y}{8\times3-6\times6}=\frac{z}{6\times4-6\times3}$$

या, $$\frac{x}{36-48}=\frac{y}{24-36}=\frac{z}{24-18}$$

या, $$\frac{x}{-12}=\frac{y}{-12}=\frac{z}{6}=k \quad (\text{मान लो})$$

$$\therefore \quad x=-12k$$
$$y=-12k$$
$$z=6k$$

अब x, y, z के मूल्यों को तीसरे समीकरण में रखने पर,

$$2\times-12k+5\times-12k+6k+10=0$$

या, $-24k-60k+6k+10=0$

या, $-84k+6k+10=0$

या, $78k=-10$

$\therefore\quad k=\frac{10}{78}=\frac{5}{39}$

$\therefore\quad x=-12\times\frac{5}{39}=\frac{-20}{13}=-1\frac{7}{13}$

$y=-12\times\frac{5}{39}=\frac{-20}{13}=-1\frac{7}{13}$

$z-6k=6\times\frac{5}{39}=\frac{10}{13}$

(ii) पहले दोनों समीकरणों से,

$$\frac{x}{(-3)(-6)-(2)(4)}=\frac{y}{4\times7-2\times(-6)}=\frac{z}{2\times2-7\times(-3)}$$

या, $\frac{x}{18-8}=\frac{y}{28+12}=\frac{z}{4+21}$

या, $\frac{x}{10}=\frac{y}{40}=\frac{z}{25}$

या, $\frac{x}{2}=\frac{y}{8}=\frac{z}{5}=k$ (मान लो)

$\therefore\quad x=2k$

$y=8k$

$z=5k$.

अब x, y, z के मूल्यों को तीसरे समीकरण में रखने पर,

$$4 \times 2k + 3 \times 8k + 5k = 37$$

या, $8k + 24k + 5k = 37$

या, $37k = 37$

$\therefore \quad k = 1$

$\therefore \quad x = 2$

$y = 8$

$z = 5.$

EXAMPLE 62

हल करो—

1. $2x + 3y - 8 = 0$
   $3x - 4y + 5 = 0$

2. $3x - 5y + 9 = 0$
   $5x + 2y - 16 = 0$

3. $4x - 5y + 8 = 0$
   $2x - 3y + 6 = 0$

4. $-3x + 2y + 2 = 0$
   $5x - 3y - 5 = 0$

5. $6x - 7y + 12 = 0$
   $-7x + 4y + 11 = 0$

6. $7x - 8y = -14$
   $5x - 3y = 9$

7. $4x - 5y + 2z = 0$
   $2x - 7y + 4z = 0$
   $x + y + z = 6$

8. $5x + 6y + 8z = 0$
   $3x + 4y + 6z = 0$
   $x + 5y + 16z = 8$

9. $2x - 7y + 11z = 0$
   $6x - 8y + 7z = 0$
   $3x + 4y + 5z = 35$

10. $7x + 3y - 8z = 0$
    $5x - 7y + 8z = 0$
    $3x + 5y + 7z = 64$

11. $x - 2y + z = 0$
    $9x - 8y + 3z = 0$
    $2x + 3y + 5z = 36$

12. $2(4x + 9y) = 7(2y + z)$
    $7(x + 2y) = 8(y + z)$
    $3x + 4y + 5z = 38$

13. $4(x + y) = 3(2z - y)$
    $5(x - 2y) = 3(2y - 3z)$
    $6(x - 2) + 7(y - 3) + 8(z - 4)) = 67$

14. $5x = 2y$
$7y = 5z$
$14x + 5y + 6z = 150$

15. $15x = 10y = 6z$
$7x + 8y + 9z = 332$

16. $4x - 13y + 8z = 0$
$7x + 6y - 9z = 0$
$\frac{5}{x} + \frac{8}{y} + \frac{15}{z} = 6\frac{2}{3}$

17. $2x - 7y + 11z = 0$
$6x - 8y + 7z = 0$
$3x + 4y + 5z = 35$

18. $2x - 3y + 4z = 0$
$7x + 2y - 6z = 0$
$4x + 3y + z = 37$

19. $5x = 3y$
$7y = 5z$
$x + 2y + 3z = 34$

20. $10x = 5y = 4z$
$2x - 3y + 5z = 17$

80.
$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad ....(1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad ....(2)$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad ....(3)$$

के रूपवाले समीकरण को हल करना—

नियम I.—प्रत्येक समीकरण में तीन अज्ञात राशियाँ हैं। अतः इनमें से किन्हीं दो को लेकर एक अज्ञात राशि को हटाओ। फिर किन्हीं दो और (इनमें पहले के दो में से एक रहेगा ही) को लेकर उसी अज्ञात राशि को हटाओ जिसको पहले हटाये हो। बाद में दो समीकरण ऐसे मिलेंगे जिनमें दो-दो अज्ञात राशियाँ होंगी। फिर पहले बताये गये विधियों से उन दो अज्ञात राशियां के मूल्यों को मालूम करो—

क्रिया—अज्ञात राशि z को हटाने के लिए (1) और (2) को क्रमशः c_2 और c_1 से गुणा करने पर,

$$c_2a_1x + b_1c_2y + c_1c_2z = d_1c_2$$
और $$c_1a_2x + b_2c_1y + c_1c_2z = d_2c_1$$

घटाने पर,

$$(c_1a_2 - c_2a_1)x + (b_2c_1 - b_1c_2)y = c_1d_2 - c_2d_1 \quad ....(4)$$

फिर (1) और (3) को क्रमशः c_3 और c_1 से गुणा करने पर,

$$c_3a_1x + b_1c_3y + c_1c_3z = d_1c_3$$
$$c_1a_3x + b_3c_1y + c_1c_3z = d_3c_1$$

घटाने पर,

$$(c_1a_3 - c_3a_1)x + (b_3c_1 - b_1c_3)y = c_1d_3 - c_3d_1 \quad ....(B)$$

अब (*A*) और (*B*) से वज्राभ्यास प्रणाली के अनुसार x और y के मूल्य निकाले जा सकते हैं। उसके बाद दिये हुए तीन समीकरणों में से किसी में x और y इन मूल्यों के प्रयोग से z का मूल्य निकलेगा।

उदाहरण—
$$4x - 3y + 2z = 40 \quad ....(1)$$
$$5x + 9y - 7z = 47 \quad ....(2)$$
$$9x + 8y - 3z = 97 \quad ....(3)$$

समीकरण (1) और (2) को क्रमशः 7 और 2 से गुणा करने पर,

$$28x - 21y + 14z = 280$$
$$10x + 18y - 14z = 94$$

जोड़ने पर, $38x - 3y = 374$ ....(*A*)

फिर समीकरण (1) और (3) को क्रमशः 3 और 2 से गुणा करने पर,

$$12x - 9y + 6z = 120$$
$$18x + 16y - 6z = 194$$

जोड़ने पर, $30x + 7y = 314$ ...(*B*)

अब (*A*) और (*B*) से वज्राभ्यास प्रणाली के अनुसार,

$$\frac{x}{(-3)\times(-314) - 7(-374)} = \frac{y}{(-374)\cdot 30 - (-314)38} = \frac{1}{38\times 7 - 30(-3)}$$

या,
$$\frac{x}{942 + 2618} = \frac{y}{-11220 + 11932} = \frac{1}{266 + 90}$$

या, $\frac{x}{3560}=\frac{y}{712}=\frac{1}{356}$

$\therefore \quad x=10, \; y=2$

x और y के इन मूल्यों को (1) में रखने पर,

$$40-6+2z=40$$

$\therefore \quad z=3$

$\therefore \quad x=10, \; y=2, \; z=3$

नियम II.—इस दूसरी रीति में तीनों अज्ञातों में से किसी को नहीं हटाया जाता है। बल्कि इसमें किन्हीं दो-दो को एक साथ लेकर एक ऐसा सम्बन्ध प्राप्त किया जाता है जिसमें बायें पक्ष में तीनों अज्ञात रहते हैं और उसके बाद बराबर के चिन्ह (=) के बाद 0 (शून्य) रहता है। इस प्रकार हमें दो सम्बन्ध ऐसे मिलेंगे जिनमें तीनों अज्ञात आते हैं।

क्रिया : (1) और (2) समीकरण में क्रमशः d_2 और d_1 से गुणा करने पर,

$$a_1 d_2 x+b_1 d_2 y+c_1 d_2 z=d_1 d_2$$

और $a_2 d_1 x+b_3 d_1 y+c_2 d_1 z=d_1 d_2$

घटाने पर,

$$(a_1 d_2-a_2 d_1)x+(b_1 d_2-b_2 d_1)y+(c_1 d_2-c_2 d_1)z=0 \text{....}(A)$$

फिर (1) और (3) समीकरण मे क्रमशः d_3 और d_1 से गुणा करने पर,

$$a_1 d_3 x+b_1 d_3 y+c_1 d_3 z=d_1 d_3$$

और $a_2 d_1 x+b_2 d_1 y+c_2 d_1 z=d_1 d_3$

घटाने पर,

$$(a_1 d_3-a_2 d_1)x+(b_1 d_3-b_2 d_1)y+(c_1 d_3-c_2 d_1)z=0 \text{...}(B)$$

अब; स्पष्ट है कि (A) और (B) द्वारा सूचित दो समीकरण को और दिये हुए तीन समीकरणों में से किसी एक को युगपत् समीकरण मानकर पहले बताये हुए नियम के अनुसार हल किये जा सकते हैं।

उदाहरण हल करो—

$$12x + 9y - 7z = 2 \quad \ldots(1)$$
$$8x - 26y + 9z = 1 \quad \ldots(2)$$
$$23x + 21y - 15z = 4 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (2) को 2 से गुणा करके (1) को घटाने पर,

$$16x - 52y + 18z = 2$$
$$12x + 9y - 7x = 2$$

घटाने पर, $4x - 61y + 25z = 0 \quad \ldots(A)$

अब (1) को 2 से गुणा करने पर,

$$24x + 18y - 14z = 4$$

और $23x + 21y - 15z = 4$

घटाने पर, $x - 3y + z = 0 \quad \ldots(B)$

अब $\because$ $4x - 61y + 25z = 0 \quad \ldots(A)$

$$x - 3y + z = 0 \quad \ldots(B)$$

$\therefore$ वज्राभ्यास प्रणाली के अनुसार,

$$\frac{x}{-61+75} = \frac{y}{25-4} = \frac{7}{-12+61}$$

या, $\frac{x}{14} = \frac{y}{21} = \frac{z}{49}$

या, $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{7} = k$ (मान लो)

$\therefore$ $x = 2k,\ y = 3k,\ z = 7k$

समीकरण (1) में x, y, z के मान रखने पर,

$k(24 + 27 - 49) = 2$

या, $2k = 2$

$\therefore$ $k = 1$

$\therefore$ $x = 2, \quad y = 3, \quad z = 7$

EXAMPLE 63

हल करो—

1. $3x + 2y + 5x = 32$
$2x + 5y + 3x = 31$
$5x + 3y + 2z = 27$

2. $2x - 3y + 5z = 11$
$5x + 2y - 7z = -12$
$-4x + 3y + z = 5$

3. $x + y - z = 1$
$8x + 3y - 6z = 1$
$3z - 4x - y = 1$

4. $2x + 3y + 4z = 29$
$3x + 2y + 5z = 32$
$4x + 3y + 2z = 25$

5. $2x + 3y + 4z = 16$
$3x + 2y - 5z = 8$
$5x - 6y + 3z = 6$

6. $4x - 3y + 2z = 8$
$3x + 4y - 5z = 6$
$-6x + 5y + 7z = -1$

7. $8x - 7y - 5z = 1$
$-7x + 5y + 6z = -1$
$12x - 8y - 11z = 2$

8. $x + 5y - 4z = 5$
$3x - 2y + 2x = 14$
$-10x + 8y + z = 6$

9. $2x + 4y + 6z = 49$
$3x + 5y + 6z = 64$
$4x + 3y + 4z = 55$

10. $x + 3y + 5z = 10$
$3x + 5y + 7z = 14$
$5x + 7y + 8z = 15$

11. $x + y - z = 1$
$-4x - y + 3x = 1$
$8x + 3y + 6d = 1$

12. $2x - 3y + 5z = 11$
$5x + 2y - 7z = -12$
$-4x + 3y + z = 5$

13. $4x - 3y + 2z = 8$
$3x - 4y + 5z = 6$
$-6x + 5y + 7z = -1$

14. $2x + 3y + 4z = 16$
$3x + 2y - 5z = 8$
$5x - 6y + 3z = 6$

15. $x + 5y - 4z = 5$
$3x - 2y + 2z = 14$
$-5x + 4y + z = 6$

16. $2x - 3y + 4z = 11$
$7x + 3y - 5z = 3$
$9x + 10y - 11z = 4$

17. $x + 3y + 5z = 10$
$3x + 5y + 7z = 14$
$5x + 7y + 8z = 15$

18. $x + y + z = -2$
$x - 2y + 2z = 10$
$2x - 3y + 4z = 23$

19. $2x + 3y + 4z = 29$
$3x + 2y + 5z = 32$
$4x + 3y + 2z = 25$

20. $2x + 3y + 5z = 49$
$3x + 5y + 6z = 64$
$4x + 3y + 4z = 55$

21. $4x - 5y + 2z = 0$
$2x - 7y + 4z = 0$
$x + y + z = 6$

22. $x - 2y + z = 0$
$9x - 8y + 3z = 0$
$2x + 3y + 5z = 0$

23. $2x - 7y + 11z = 0$
$6x - 8y + 7z = 0$
$3x + 4y + 5z = 35$

24. $2x - 3y + 4z = 0$
$7x + 2y - 6z = 0$
$4x + 3y + z = 37$

25. $5x + 6y + 8z = 0$
$3x + 4y + 6z = 0$
$2x + 5y + z + 10 = 0$

26. $x + 6y = 5z$
$7x + 2 = 6y$
$5x + 6y + 4z = 24$

27. $4x - 13y + 8z = 0$
$7x + 6y - 9z = 0$
$\frac{5}{x} + \frac{8}{y} + \frac{15}{z} = 6\frac{2}{3}$

28. $x + y = z$
$x - 4y + 2z = 0$
$\frac{2}{x} - \frac{6}{y} - \frac{15}{z} = 4$

29. $5x = 3y$
$7y = 5z$
$x + 2y + 3z = 34$

30. $10x = 5y = 4z$
$2x - 3y + 5z = 17$

31. $2(4x + 9y) = 7(2y + z)$
$7(x + 2y) = 8(y + z)$
$3x + 4y + 5z = 38$

32. $3x + 2y + 5z = 22$
$2x + 5y + 3z = 31$
$5x + 3y + 2z = 27$

33. $4x - 3y + 2z = 8$
$3x + 4y + 5z = 6$
$-6x + 5y + 7z = 1$

34. $2x + 3y + 4z = 16$
$3x - 2y + 5z = 8$
$5x - 6y + 3z = 6$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. हल करो—

(i) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1, \; \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1, \; \frac{c}{z} + \frac{a}{x} = 1$

(ii) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ \frac{z}{c}+\frac{x}{a}=1$

(i) तीनों समीकरणों को जोड़ने पर,

$$2\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=3$$

या, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{3}{2}$ ....(A)

(A) से पहले समीकरण को घटाने पर,

$$\frac{c}{z}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

$\therefore \quad z=2c$

z के इस मूल्य को दूसरे एवं तीसरे समीकरणों में रखने पर, $y=2b$ और $x=2a$

$\therefore \quad x=2a, \quad y=2b, \quad z=2c$

(ii) तीनों समीकरणों को जोड़ने पर,

$$2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=3$$

$\therefore \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{3}{2}$ ....(A)

(A) में से पहले समीकरण को घटाने पर,

$$\frac{z}{c}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

$\therefore \quad z=\frac{c}{2}$

z के इस मूल्य को दूसरे एवं तीसरे समीकरण में रखने पर,

$$y=\frac{b}{2} \text{ और } x=\frac{a}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = \frac{c}{2}$$

उदाहरण 2. हल करो—

(i) $\frac{xy}{x+y} = 1$; (ii) $\frac{xz}{x+z} = 2$; (iii) $\frac{yz}{y+z} = 3$

(i) से, $\frac{x+y}{xy} = 1$

या, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ ....(1)

उसी प्रकार (ii) और (iii) से,

$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ ....(2)

और $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ ....(3)

(1), (2) और (3) को जोड़ने पर,

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{6}$$

$\therefore \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{12}$ ....(4)

(4) में (1) को घटाने पर,

$$\frac{1}{z} = \frac{11}{12} - 1 = \frac{-1}{12}$$

$\therefore \quad z = -12$

फिर (4) में से (2) घटाने पर,

$$\frac{1}{y} = \frac{11}{12} - \frac{1}{2} = \frac{11-6}{12} = \frac{5}{12}$$

$\therefore \quad y - \frac{12}{5}$

और (4) में से (3) को घटाने पर,

$$\frac{1}{x}=\frac{11}{12}-\frac{1}{3}=\frac{11-4}{12}=\frac{7}{12}$$

$$\therefore \quad x=\frac{12}{7}$$

$$\therefore \quad x=1\frac{5}{7}, \quad y=2\frac{2}{5}, \quad z=-12$$

उदाहरण 3. हल करो—

(i) $xyz=a(yz-zx-xy)=b(zx-xy-yz)$
$=c(xy-yz-zx)$

(ii) $xy=12$ ....(1)

$yx=20$ ....(2)

$zx=15$ ....(3)

(i) $\because \quad xyz=x(yz-xz-zy)$

$$\therefore \quad \frac{1}{a}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z} \quad ....(1)$$

उसी प्रकार, $\frac{1}{b}=\frac{1}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$ ....(2)

और $\frac{1}{c}=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ ....(3)

(2) और (3) को जोड़ने पर,

$$\frac{-2}{x}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{b+c}{bc}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-2bc}{b+c}$$

उसी प्रकार, $y = \dfrac{-2ca}{c+a}$

और $z = \dfrac{-2ab}{a+b}$

(ii) (1), (2) और 3 को एक साथ गुणा करने पर,

$$x^2y^2z^2 = 12 \times 20 \times 15 = 3600 \qquad \ldots(4)$$

$$\therefore \quad xyz = \pm 60$$

अब समीकरण (4) को (1) से भाग देने पर,

$$z = \pm 5$$

उसी प्रकार (4) को (2) और 3 से क्रमशः भाग देने पर,

$$x = \pm 3 \quad \text{और} \quad y = \pm 4$$

$$\therefore \quad x = \pm 3, \quad y = 4, \quad z = \pm 5$$

EXAMPLE 64

हल करो—

1. $x(x+y+z) = 36$
   $y(x+y+z) = 48$
   $z(x+y+z) = 60$

2. $x + y + z = 0$
   $(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0$
   $bcx + cay + abz = 1$

3. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
   $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 1$
   $\dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

4. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = a$
   $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = b$
   $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = c$

5. $\dfrac{yz}{y+z} = a$
   $\dfrac{zx}{z+x} = b$
   $\dfrac{xy}{x+y} = c$

6. $axy = c(bx + ay)$
   $bxy = c(ax - cy)$

7. $y + z = 4$
   $z + x = 6$
   $x + y = 8$

8. $3xy = (4x + y)$
$2xz = 3(x + z)$
$5yz = 12(y + z)$

9. $y + z - x = 6$
$z + x - y = 10$
$x + y - z = 14$

10. $a^2x + b^2y = 2ab(a + b)$
$b(2a + b)x + a(a + 2b) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

11. $x + y + z = 0$
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$
$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} = 1$

12. $y + z = 11$
$z + x = 10$
$x + y = 9$

13. $x + y = 9$
$y + z = 11$
$z + x = 10$

14. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$
$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7$
$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 6$

15. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7$
$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9$
$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 8$

16. $x + y = 4xy$
$y + z = 5yz$
$z + x = 3zx$

17. $\frac{xy}{x + y} = \frac{1}{5}$
$\frac{yz}{y + z} = \frac{1}{7}$
$\frac{zx}{z + x} = \frac{1}{6}$

18. $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 3}{4} = \frac{x - 5}{6}$
$x + y + z = 33$

19. $x + y + z = k$
$ax + by + cz = 0$
$a^2x + b^2y + c^2z = 0$

20. $x - ay + a^2z = a^3$
$x - by + b^2z = b^3$
$x - cy + c^2z = c^3$

21. $y+z=4,\ z+x=6,\ x+y=8$
$x+y=9,\ y+z=11,\ z+x=10$

22. $a(xy-yz+zx)=b(xy+yz-zx)$
$=c(-xy+yz+zx)=xyz$

23. $xy=30,\ yz=42,\ zx=35$

24. $xy=\dfrac{1}{6},\quad yz=\dfrac{1}{12},\quad zx=\dfrac{1}{8}$

25. $\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{2}{3},\quad \dfrac{yz}{y+z}=1\dfrac{1}{5},\quad \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{3}{4}$

26. $\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{7},\quad \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{1}{9},\quad \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{1}{8}$

27. $3xy=4(x+y)$
$2zx=3(z+x)$
$5yz=12(y+z)$

28. $x(y+z)=14$
$y(z+x)=18$
$z(x+y)=20$

29. $x(x+y+z)=8$
$y(x+y+z)=24$
$z(x+y+z)=32$

30. $x(x+y+z)=24$
$y(x+y+z)=40$
$z(x+y+z)=70$

31. $x(x+y+z)=bc$
$y(x+y+z)=ca$
$z(x+y+z)=ab$

32. $x-4y+z+10=0$
$y-4z+x+15=0$
$z-4x+y+35=0$

33. $x+y+z=0$
$(a+b)x+(b+c)y+(c+a)z=0$
$abx+bcy+caz=0$

34. $x+y=5xy,\qquad 2x+3y=12xy$

35. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1-\dfrac{x}{c};\quad \dfrac{y}{a}+\dfrac{x}{b}=1+\dfrac{y}{z}$

36. $\dfrac{xy}{x+y}=1;\quad \dfrac{xz}{x+z}=2;\quad \dfrac{yz}{y+z}=3$ (61A)

इक्कीस

युगपत् समीकरण सम्बन्धी प्रश्नावली

(Problems on Simultaneous Equation)

81. अभी तक सरल समीकरण और सरल वर्ग समीकरण सम्बन्धी प्रश्नों पर विचार किया जा चुका है। साथ-ही-साथ इनका उपयोग अंकगणित के सवालों में कैसे किया जाता है, इस पर भी विचार हो चुका है। इस अध्याय में युगपत् समीकरण से सम्बन्धित प्रश्नों पर विचार किया जायेगा।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. 10 वर्ष पहले बाप की उम्र बेटे की उम्र की सातगुनी थी। 2 वर्ष बाद उसकी उम्र का दुगुना उसके बेटे की उम्र का पाँचगुना हो जायेगा; तो इस वक्त उनकी क्या उम्र है। **(57S, H.S. 61S)**

माना कि बाप की वर्त्तमान उम्र $= x$ वर्ष और

बेटे की वर्त्तमान उम्र $= y$ वर्ष है।

अतः 10 वर्ष पहले बाप की उम्र $= x - 10$ वर्ष

तथा बेटे की उम्र $= y - 10$ वर्ष

2 वर्ष बाद बाप की उम्र $= x + 2$ वर्ष

तथा बेटे की उम्र $= y + 2$ वर्ष

प्रश्नानुसार,

$$x - 10 = 7(y - 10) \qquad \ldots(i)$$

और $$2(x + 2) = 5(y + 2) \qquad \ldots(ii)$$

(i) और (ii) से,

$$x - 7y + 60 = 0$$

और $$2x - 5y - 6 = 0$$

इसलिए बज्राभ्यास प्रणाली के अनुसार,

$$\frac{x}{42+300}=\frac{y}{120+6}=\frac{1}{-5+14}$$

या, $\frac{x}{342}=\frac{y}{126}=\frac{1}{9}$

$\therefore \quad x=\frac{342}{9}=38$

और $y=\frac{126}{9}=14$

अतः बाप की उम्र $=38$ वर्ष

और बेटे की उम्र $=14$ वर्ष

उदाहरण 2. पिता तथा पुत्र की वर्त्तमान उम्रों का अनुपात 5 : 3 है। चार वर्ष बाद पिता की उम्र चार वर्ष पहले पुत्र की जितनी उम्र थी उसकी दुगनी होगी। पिता और पुत्र की वर्त्तमान उम्र बताओ। (64S)

माना कि पिता और पुत्र की उम्र क्रमशः x और y है। चार वर्ष बाद पिता की उम्र $=x+4$ वर्ष एवं चार वर्ष पहले पुत्र की उम्र $=y-4$.

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{3} \quad \text{....(i)}$$

और $x+4=2(y-4)$ ....(ii)

समीकरण (i) से, $x=\frac{5}{3}y$

x के इस मूल्य को (ii) में रखने पर,

$\frac{5}{3}y+4=2y-8$

या, $y(\frac{5}{3}-2)=-12$

या, $-\frac{1}{3}y=-12$

$\therefore \quad y=36$ वर्ष

$\therefore \quad x=36\times\frac{5}{3}=60$ वर्ष

∴ पिता की वर्त्तमान उम्र 60 वर्ष और पुत्र की वर्त्तमान उम्र 36 वर्ष है।

उदाहरण 3. पिता और पुत्र की उम्र का योगफल 100 साल है और दोनों की उम्र के गुणनफल का दसवाँ हिस्सा पिता की उम्र से 180 ज्यादा है, तो पिता और पुत्र की उम्र निकालो।

माना कि पिता और पुत्र की वर्त्तमान उम्र क्रमशः x और y वर्ष है।

∴ प्रश्नानुसार,

$$x+y=100 \quad ....(i)$$

और $$x+180=\frac{1}{10}xy \quad ....(ii)$$

(i) से, $y=100-x$.

∴ y के इस मूल्य को (ii) रखने पर,

$$x+180=\frac{1}{10}x(100-x)$$

या, $10x+1800=100x-x^2$

या, $x^2-90x+1800=0$

या, $x^2-60x-30x+1800=0$

या, $x(x-60)-30(x-60)=0$

या, $(x-30)(x-60)=0$

∴ या तो $x-30=0$, ∴ $x=30$

अथवा $x-60=0$, ∴ $x=60$

जब $x=30$, $y=100-30=70$

और जब $x=60$, $y=100-60=40$

x और y इन मूल्यों में $x=60$ और $y=40$ ही सत्य होगा क्योंकि x का मूल्य y के मूल्य से कभी भी कम नहीं होगा। (कारण x पिता की उम्र है तथा y पुत्र की उम्र हैं)।

∴ पिता की वर्त्तमान उम्र 60 वर्ष और पुत्र की वर्त्तमान उम्र 40 वर्ष है।

उदाहरण 4. दो अंक वाली एक संख्या के दोनों अंकों का योगफल 9 है; यदि संख्या में 9 जोड़ दें तो संख्या के दोनों अंक उलट जाते हैं। संख्या निकालो। (S.S. 56A, 65S, 68A)

माना कि संख्या की दहाई का अंक x और इकाई का अंक y है।

अतः संख्या $= 10x + y.$

और संख्या की उलटी संख्या $= 10y + x.$

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$$x + y = 9 \quad \text{....(i)}$$

और $$10x + y + 9 = 10y + x \quad \text{... (ii)}$$

(i) से, $y = 9 - x$

x के इस मूल्य को (ii) में रखने पर,

$$10x + (9 - x) + 9 = 10(9 - x) + x$$

या, $9x + 18 = -9x + 90$

या, $18x = 90 - 18 = 72$

$\therefore$ $x = 4.$

$\therefore$ $y = 9 - 4 = 5$

$\therefore$ संख्या $= 10x + y$

$= 10 \times 4 + 5 = 45$

उदाहरण 5. दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 7 है। अगर अंकों के स्थान बदल दिये जाते हैं तो यह संख्या पहली से 9 अधिक हो जाती है। पहली संख्या निकालो। (H.S. 61S)

माना कि पहली संख्या की दहाई का अंक x है तथा इकाई का अंक y है।

$\therefore$ संख्या $= 10x + y$

अंकों के उलटने के बाद की संख्या $= 10y + x$

∴ प्रश्नानुसार,

$$x + y = 7 \quad ....(i)$$

और $10y + x = 10x + y - 9 \quad ....(ii)$

(i) से, $y = 7 - x$

y के इस मूल्य को (ii) से रखने पर,

$$10(7 - x) + x = 10x + 7 - x + 9$$

या, $70 - 9x = 9x + 16$

या, $18x = 70 - 16 = 54$

∴ $x = 3$

अब (i) में x का मान देने पर,

∴ $y = 7 - 3 = 4$

∴ संख्या $= 10 \times 3 + 4 = 34$ है ।

उदाहरण 6. दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 6 है । अंकों के उलट जाने से जो नयी संख्या बनती है, वह पहली संख्या का $\frac{7}{4}$ गुणा है, तो पहली संख्या निकालो । (H.S. 54 A)

माना कि पहली संख्या की दहाई का अंक x और इकाई का अंक y है ।

अतः संख्या $= 10x + y$,

अंक उलट जाने के बाद की संख्या $= 10y + x$

∴ प्रश्नानुसार,

$$x + y = 6 \quad ....(i)$$

और $10y + x = \frac{7}{4}(10x + y) \quad ....(ii)$

(i) से, $y = 6 - x$

y के इस मूल्य को (ii) में रखने पर,

$$10(6 - x) + x = \frac{7}{4}(10x + 6 - x)$$

या, $60 - 9x = \frac{7}{4}(9x + 6)$

या, $240 - 36x = 63x + 42$

या, $99x = 240 - 42 = 198$

$\therefore \qquad x = 2$

अब (i) में x का मान देने पर,

$\therefore \quad y = 6 - 2 = 4$

$\therefore$ संख्या $10 \times 2 + 4 = 24$ है

उदाहरण 7. एक सौ से कम एक अदद (संख्या) की दहाई का अंक इकाई के अंक से 5 ज्यादा है; दोनों अंकों को उलटकर लिखने से जो संख्या मिलती है वह पहली संख्या का $\frac{3}{8}$ है। बताओ वह कौन सी संख्या है।

(H.S. 65S)

एक सौ से कम एक संख्या दो अंकों वाली संख्या होगी।
माना कि संख्या की दहाई का अंक x तथा इकाई का अंक y है।

$\therefore \qquad$ संख्या $= 10x + y$

अंकों को उलटने पर संख्या $= 10y + x$

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$$x = y + 5 \qquad \text{....(i)}$$

और $\quad 10y + x = \frac{3}{8}(10x + y) \qquad$ ....(ii)

(i) से, x के मूल्य को (ii) में रखने पर,

$$10y + y + 5 = \frac{3}{8}\{10(y + 5) + y\}$$

या, $11y + 5 = \frac{3}{8}(11y + 50)$

या, $88y + 40 = 33y + 150$

या, $55y = 150 - 40 = 110$

$\therefore \qquad y = 2$

अब (i) में x का मान देने पर,

$\therefore \quad x = 2 + 5 = 7$

$\therefore$ संख्या $10 \times 7 + 2 = 72$ है

उदाहरण 8. दो अंक वाली किसी संख्या के अंकों का योगफल 5 है। दहाई के स्थान के अंक के 10 गुने के साथ इकाई के स्थान के अंक का चौगुना जोड़ने पर संख्या के दोनों अंक उलट जाते हैं। संख्या बताओ (H.S. 60S)

माना संख्या की दहाई का अंक x और इकाई का अङ्क y है।

अङ्क उलटने पर संख्या $= 10y + x$

∴ प्रश्नानुसार,

$$x + y = 5 \quad ....(i)$$

और $$10x + 4y = 10y + x \quad ....(ii)$$

(i) से, $y = 5 - x$,

y के इस मूल्य को (ii) में रखने पर,

$$10x + 4(5 - x) = 10(5 - x) + x$$

या, $6x + 20 = 50 - 9x$

या, $15x = 30$

∴ $x = 2$

अब (i) में x का मान देने पर,

∴ $y = 5 - x = 5 - 2 = 3$

∴ संख्या $= 10 \times 2 + 3 = 23$ है।

उदाहरण 9. 10 और 100 के बीच की कोई संख्या अपने अङ्कों के योग की आठगुनी है। यदि संख्या में से 45 घटा दिया जाये, तो अङ्कों का स्थान बदल जाता है, तो संख्या मालूम करो। (64A)

10 और 100 के बीच की कोई संख्या दो अङ्कों की होगी।

माना कि इस संख्या की दहाई का अङ्क x है और इकाई का अङ्क y है।

∴ संख्या $= 10x + y$

अङ्क उलटने पर संख्या $= 10y + x$

∴ प्रश्नानुसार,

$$10x + y = 8(x + y) \quad ....(i)$$

और

$$10x + y - 45 = 10y + x \quad ....(ii)$$

(i) और (ii) से,

$$2x - 7y = 0 \quad ....(1)$$

और

$$9x - 9y = 45 \quad ....(2)$$

(1) से, $y = \frac{2}{7}x$

y के इस मूल्य को (2) में रखने पर,

$$9x - 9 \cdot \tfrac{2}{7}x = 45$$

या, $$9x - \frac{18x}{7} = 45$$

या, $$\frac{63x - 18x}{7} = 45$$

या, $$\frac{45x}{7} = 45$$

∴ $x = 7$

अब (i) में x का मान देने पर,

∴ $y = \frac{2}{7} \cdot 7 = 2$

∴ संख्या $= 10 \times 7 + 2 = 72$ है

उदाहरण 10. किसी एक भिन्न के अंश में 1 जोड़ने से उसका मान 1 हो जाता है और जब अंश में से 1 घटाया जाता है और हर में 2 जोड़ा जाता है, तो भिन्न $\frac{1}{3}$ हो जाता है। उस भिन्न को निकालो। (H.S. 64S)

माना कि भिन्न का अंश x तथा हर y है।

∴ प्रश्नानुसार,

$$\frac{x+1}{y} = 1 \quad ....(i)$$

और $$\frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{3} \quad ....(ii)$$

(i) से, $y = x + 1$

y के इस मूल्य को (ii) में रखने पर,

$$\frac{x-1}{x+1+2} = \frac{1}{3}$$

या, $3x - 3 = x + 3$

या, $2x = 6$

∴ $x = 3$

और तब $y = 3 + 1 = 4$

∴ भिन्न $= \frac{3}{4}$

उदाहरण 11. उस आदमी की वर्त्तमान उम्र क्या होगी जो 20 साल पहले अपने लड़के की उम्र के पाँच गुनी उम्र का था जिसकी उम्र 16 साल बाद 41 वर्ष का हो जायगा। (S.S. 67A)

मान लिया कि पिता की वर्त्तमान उम्र x वर्ष है एवं पुत्र की वर्त्तमान उम्र y वर्ष है।

अतः 20 वर्ष पहले पिता की उम्र $= x - 20$

और ,, ,, पुत्र ,, $= y - 20$

फिर 16 साल वाद पुत्र की उम्र $= y + 16$

अतः प्रश्नानुसार,

$x - 20 = 5(y - 20)$ ....(i)

और $y - 16 = 41$ ....(ii)

(ii) से, $y = 41 - 16 = 25$ वर्ष

y का मान (i) में रखने पर,

$x - 20 = 5 \times 25 - 100$

$= 125 - 100 = 25$ वर्ष

∴ $x = 25 + 20 = 45$ वर्ष

उदाहरण 12. एक मनुष्य किसी ग्राहक के हाथ 9 घोड़े और 7 गाय 75 पौंड में बेचता है. वह एक दूसरे ग्राहक के हाथ उसी दर और मूल्य में 6 घोड़े और 13 गाय भी बेचता है। एक घोड़े और एक गाय का मूल्य कितना है ? (H.S. 60A)

मान लो कि एक घोड़े का दाम $= x$ पौंड

एक गाय का दाम $= y$ पौंड

अतः प्रश्नानुसार,

$9x + 7y = 75$.... ....(i)

फिर $6x + 13y = 75$.... ....(ii)

अतः (i) और (ii) से,

$9x + 7y = 6x + 13y$

या, $3x = 6y$

$\therefore$ $x = 2y$

(i) में x का मान रखने पर,

$9 \times 2y + 7y = 75$

या, $25y = 75$

$\therefore$ $y = \frac{75}{25} = 3$ पौंड

$\therefore$ $x = 2y = 2 \times 3 = 6$ पौंड

$\therefore$ एक घोड़े का दाम $= 6$ पौंड

और एक गाय का दाम $= 3$ पौंड

उदाहरण 13. दो अंकों की एक संख्या का योग 7 है। अगर अंकों के स्थान बदल दिये जाते हैं, तो वह संख्या पहली से 9 अधिक हो जाती है, तो पहली संख्या निकालो। (H. S. 61 A)

मान लो कि इकाई के स्थान का अंक y है एवं दहाई के स्थान का अंक x है।

अर्थात् संख्या $= 10x + y$

फिर प्रश्नानुसार, $x + y = 7$.... ....(i)

और अंक के स्थान बदलने पर,

संख्या $= 10y + x$ है।

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$$10y + x = 10x + y + 9$$

या, $9y - 9x = 9$

या, $y - x = 1$

$\therefore$ $y = 1 + x$

y के इस मान को (i) में रखने पर,

$$x + 1 + x = 7$$

या, $2x = 6$; $\therefore$ $x = 3$

$\therefore$ $y = 1 + x = 1 + 3 = 4$

$\therefore$ संख्या $= 10 \times 3 + 4 = 34$

उदाहरण 14. दो लगातार विषम (*odd integer*) संख्याओं के वर्गों का जोड़ 802 है, तो विषम संख्याएं मालूम करो। **(S.S, 63A)**

मान लो कि दो लगातार विषम संख्याएं x और $x + 2$ हैं।

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$$x^2 + (x + 2)^2 = 802$$

या, $2x^2 + 4x + 4 = 802$

या, $2x^2 + 4x - 798 = 0$

या, $x^2 + 2x - 399 = 0$

या, $x^2 - 19x + 21x - 399 = 0$

या, $x(x - 19) + 21(x - 19) = 0$

या, $(x - 19)(x + 21) = 0$

$\therefore$ $x = 19$ या -21

लेकिन केवल धनात्मक संख्या लेने पर,

$x = 19$, $\therefore$ $x + 2 = 19 + 2 = 21$

अतः संख्याएं 19, 21

उदाहरण 15. दो अंकों की संख्या का योग 6 है। अंकों के उलट जाने से जो संख्या बनती है, वह पहली संख्या का $\frac{7}{4}$ गुणा है, तो पहली संख्या निकालिये। (H.S. 64A)

मान लो कि इकाई के स्थान का अंक x है और दहाई के स्थान का अंक y है।

अतः संख्या $= 10x + y$

$\therefore$ प्रश्नानुसार, $x + y = 6$.... ....(i)

अंकों के स्थान बदलने पर,

संख्या $= 10y + x$

$\therefore$ प्रश्नानुसार,

$$10y + x = \frac{7}{4}(10x + y)$$

या, $40y + 4x = 70x + 7y$

या, $66x - 33y = 0$

या, $2x - y = 0$

$\therefore$ $y = 2x$

y का मान (i) में रखने पर,

$$x + 2x = 6$$

या, $3x = 6$; $\therefore$ $x = 2$

$\therefore$ $y = 2x = 2 \times 2 = 4$

$\therefore$ संख्या $= 2 \times 10 + 4$

$\therefore$ संख्या 24 है,

उदाहरण 16. यदि किसी भिन्न के हर से 1 घटा लिया जाय तो वह $\frac{1}{2}$ हो जाता है और यदि उसके अंश में 7 जोड़ दिया जाय तो वह 1 हो जाता है, तो वह भिन्न क्या है? (S.S. 60S)

माना कि भिन्न का अंश x तथा हर y है।

∴ प्रश्नानुसार,

$$\frac{x}{y-1}=\frac{1}{2}\ldots\qquad\ldots(i)$$

और $$\frac{x+7}{y}=1\ldots\qquad\ldots(ii)$$

(i) से, $2x=y-1$; ∴ $y=2x+1$

y का मान (ii) में रखने पर,

$$\frac{x+7}{2x+1}=1$$

या, $2x+1=x+7$

या, $x=6$; ∴ $y=2x+1=2\times6+1=13$

∴ अभीष्ट भिन्न $=\dfrac{6}{13}$

EXAMPLE 65

1. पिता और पुत्र की उम्रों का योगफल 80 साल है और पुत्र की उम्र का दुगुना पिता की उम्र से 10 वर्ष अधिक है, तो दोनों की उम्र निकालो। (55S, 59S)

2. दो मनुष्य की उम्र में 16 वर्ष का अन्तर है तथा 15 वर्ष पहले बड़े की उम्र छोटे की उम्र से दुगुनी थी, तो उनकी वर्त्तमान उम्र क्या है? (62A)

3. मोहन के पास कुछ चवन्नियाँ और अठन्नियाँ हैं जिनकी संख्या 71 है और सब मिलकर 26 रु० 75 पै० के बराबर हैं, तो उसके पास कितनी अठन्नियाँ हैं?

4. दो अङ्कोंवाली एक संख्या के अङ्कों का योगफल 5 है; और बायीं ओर के अङ्क में 1 जोड़ देने पर योगफल उस संख्या के आठवें हिस्से के बराबर हो जायगा तो संख्या क्या है?

5. दो अङ्कोंवाली किसी संख्या को दहाई के स्थान का अङ्क इकाई के स्थानके अङ्क से 5 बड़ा है और उस संख्या में से दोनों अङ्कों के योगफल का पाँच गुना घटाने से, संख्या के दोनों अङ्क उलट जाते हैं, तो संख्या बताओ।

6. दो अङ्कोंवाली किसी संख्या के अङ्कों का योगफल 5 है; और दहाई के स्थान के अङ्क के 10 गुने के साथ इकाई के स्थान के अङ्क का चौगुना जोड़ने पर संख्या के दोनों अङ्क उलट जाते हैं तो संख्या निकालो।

7. एक संख्या में दो अङ्क हैं, जिनका जोड़ 12 है। अगर अङ्क उलट दिये जाते हैं, तो संख्या पहली संख्या का $\frac{4}{7}$ हो जाती है, तो पहली संख्या क्या है ? (P.U. 38)

8. एक तीन अङ्कों की संख्या के वीच का अङ्क 0 और वाकी दो अङ्कों का जोड़ 8 है। शुरू के अङ्क को आखिर में और आखिर के अङ्क को शुरू में रखने से जो संख्या वनती है, वह पहली संख्या से 198 ज्यादा है, तो वह संख्या है ? (C. U. 22)

9. एक आदमी की उम्र लड़के को उम्र की तिगुनी है। 15 वर्ष बाद वह लड़के की दुगुनी हो जायगी। वताओ, दोनों की इस वक्त क्या उम्र है ? (P. U. 23)

10. A और B की वर्त्तमान उम्र में 9 : 5 का अनुपात है तथा 23 वर्ष पहले दोनों का अनुपात 10 : 3 था, तो प्रत्येक की वर्त्तमान उम्र मालूम करो। (62S, H.S. 65A)

11. दो अङ्कोंवाली एक संख्या के दोनों अङ्कों का योगफल 10 है। यदि संख्या में 36 घटा दिया जाय, तो अङ्कों के स्थान उलट जाते हैं। उस संख्या को निकालो। (59A)

12. वह कौन सा भिन्न है जिसके अंश में से 1 घटाने से $\frac{3}{4}$ हो जाता है और हर में 6 जोड़ने से $\frac{1}{2}$ हो जाता है ?

13. एक आदमी और एक लड़का मिलकर जिस काम को 12 दिनों में कर सकते हैं उस काम को 7 आदमी और 4 लड़के 2 ही दिनों में कर सकते हैं। बताओ, एक आदमी या एक लड़का उस काम को कितने दिनों में करेगा ?

14. 4 आदमी और 6 लड़के मिलकर एक काम को 5 दिन में करते हैं। उसी काम को 8 आदमी और 3 लड़के 4 दिन में करते हैं। बताओ कि एक आदमी या एक लड़का उस काम को कितने दिनों में कर सकता है ?

15. 10 वर्ष पहले पिता की उम्र पुत्र की उम्र से पाँच गुनी थी। किन्तु 20 वर्ष बाद पिता की उम्र पुत्र की उम्र से केवल दुगुनी रहेगी। पिता और पुत्र की वर्त्तमान उम्र निकालो। **(H.S. 63S)**

16. आज से 5 साल पहले पिता की उम्र पुत्र की उम्र से तीन गुनी थी और आज से 5 साल बाद पिता की उम्र पुत्र की उम्र से दुगनी हो जायगी, पिता और पुत्र की वर्त्तमान उम्र निकालो। **(60A)**

17. किसी संख्या के दो अंङ्कों का जोड़ 6 है। अंङ्कों को उलट देने से संख्या पहले से 18 बढ़ जाती है। तो संख्या क्या है ?

18. दो अङ्कों को एक संख्या के अङ्क 2 : 3 के अनुपात में हैं। यदि उस संख्या में 27 जोड़ दिया जाय, तो उस संख्या के अङ्क उलट जाते हैं। वह कौन सी संख्या है ?

19. किसी भिन्न के अंश में 7 जोड़ने पर वह 2 बन जाता है और उसके हर में 2 घटाने पर वह 1 बन जाता है, तो भिन्न को बताओ।

20. किसी भिन्न के अंश के साथ 1 जोड़ने पर उसका मान $\frac{1}{2}$ होता है, किन्तु हर के साथ 1 जोड़ने पर उसका मान $\frac{1}{3}$ होता है, तो भिन्न निकालो।

21. किसी भिन्न के अंश में यदि 1 जोड़ दिया जाय तो वह $\frac{2}{3}$ हो जाता है और यदि हर में 1 जोड़ दिया जाये तो वह $\frac{1}{2}$ हो जाता है, तो भिन्न बताओ।

22. वह कौन सा भिन्न है जिसके अंश में 1 जोड़ने से $\frac{1}{2}$ और हर में 5 जोड़ने में $\frac{1}{3}$ हो जाता है।

23. यदि किसी भिन्न के हर से 1 घटा लिया जाय तो वह $\frac{1}{2}$ हो जाता है, और यदि उसके अंश में 7 जोड़ा जाय तो वह 1 हो जाता है, तो वह भिन्न क्या है ? (60S)

24. A और B दोनों मिलकर एक खेत को 7 दिनों में काट सकते हैं। अगर A अकेला उस खेत को 10 दिनों में काटे तो B अकेला उसे कितने दिनों में काटेगा ?

25. 30 मील चलने में A को B से 3 घंटा समय ज्यादा लगता है। यदि A अपनी रफ्तार दुगनी कर देता है तो B से उसे 2 घं० कम समय लगता है, तो A और B की चाल निकालो। (54A)

26. किसी त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई क्रमशः $x+\frac{1}{2}y$, $y+\frac{1}{3}x$ तथा $5x-4y+3$ ईंच है। यदि यह त्रिभुज समत्रिबाहु है, तो साबित करो कि वह त्रिभुज भी, जिसकी भुजाओं की लम्बाई xy, $\frac{x+3}{x}$, $\frac{y+4}{y}$ है, समत्रिबाहु है।

बाईस

घतांक के नियम

(Theory of Indices)

82. बीजगणित में भी घातांक-नियम अङ्कगणित की तरह व्यवहार में आते हैं। उदाहरण के लिए जैसे

$$a^2 = a \times a$$

$$a^3 = a \times a \times a$$

$$a^4 = a \times a \times a \times a$$

$$a^7 = a \times a \times a \ldots \qquad \ldots 7 \textit{factors} \text{ तक}$$

अर्थात् $a^m = a \times a \times a \times \ldots m$ *factors* तक ⎫ यहाँ m और n दोनों धन
और $a^n = a \times a \times a \times \ldots n$ *factors* तक ⎭ पूर्णाङ्क संख्या हैं।

83. घातांक के नियम और उससे निकले हुए सिद्धांत— यदि m और n दो धनात्मक और पूर्णाङ्क (*Integral*) संख्या हों तो

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

$\because \quad a^m = a \times a \times a \times \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots m$ *factors* तक

और $\quad a^n = a \times a \times a \times \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots n$ *factors* तक

$\therefore \quad a^m \times a^n = (a \times a \times a \times \ldots \quad \ldots \quad \ldots m$ *factors* तक

$\times (a \times a \times a \times \ldots \quad \ldots \quad \ldots n$ *factors* तक)

$= a \times a \times a \times \ldots \quad \ldots (m+n)$ *factars* तक

$= a^{m+n}$

इसी को घातांक नियम (*Index law*) कहते हैं।

उपसूत्र I. यदि m, n, p कोई घनात्मक तथा पूर्णाङ्क संख्या हो, तो

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$$

$$\because \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\therefore \quad a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n} \times a^p$$

$$= a^{m+n+p}$$

अतः भिन्न-भिन्न घातांकों वाली किसी राशि का गुणनफल उस राशि का ऐसा घात है जिसका घातांक दिये हुए घातों के योगफल के बराबर होता है।

उपसूत्र II. यदि m, n ($m > n$) कोई घनात्मक तथा पूर्णाङ्क संख्या हो, तो

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$\because \quad a^{m-n} \times a = a^{m-n+n} = a^m$$

$$\therefore \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

उपसूत्र III. यदि m और n घनात्मक तथा पूर्णाङ्क संख्या हो, तो

$(a^m)^n = a^{m.n}$ होगा।

$\because \quad (a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times$ ....n *factors* तक

$= a^{m+m+m} +$ ....n *factors* तक

$= a^{nm}$

84. यदि मान लिया जाय कि m और n के किसी प्रकार के मूल्य के लिए $a^m \times a^n = a^{m+n}$ सिद्ध हो, तो किसी संख्या के भिन्न या ऋणात्मक घातांकवाले घातों का अर्थ निकालना—

I. यदि p और q कोई दो घनात्मक अभिन्न राशियां हों, तो $a^{\frac{p}{q}}$ का अर्थ निकालना—

$\because$ m और n के किसी मुल्य के लिए

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ होगा,

$\therefore$ m और n प्रत्येक के लिए $\frac{p}{q}$ प्रयोग करने पर,

$$a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{q}}$$

इसी प्रकार, $a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{3p}{q}}$ आदि,

$\therefore$ $a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}}$ ....q *factors* तक

$$= (a^{\frac{p}{q}})^{q} = a^{p}$$

$\therefore$ $a^{\frac{p}{q}}$, a^{p} का qवाँ मूल (q^{th} *root*) सूचित करता है।

$\therefore$ $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{p}}$

उपसूत्र : अत: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, आदि,

और साधारण रूप से, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

II. a^{0} का अर्थ निकालना—

$\because$ m और n के सब प्रकार के मूल्यों के लिए

$$a^{m} \times a^{n} = a^{m+n} \text{ है,}$$

$\therefore$ m के लिए 0 रखने पर,

$$a^{0} \times a^{n} = a^{0+n} = a$$

$\therefore$ $$a^{0} = \frac{a^{n}}{a^{n}} = 1.$$

III. यदि n कोई धनात्मक अभिन्न राशि हो, तो a^{-n} का अर्थ प्रकट करना—

$\because$ m और n के सब प्रकार के मूल्यों के लिए,

$$a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$$

∴ m के बदले $-n$ लिखने पर,

$$a^{-n} \times a^{n} = a^{-n+n} = a^{0} = 1$$

$$\therefore \quad a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$$

उपसूत्र—अतः m और n के सब प्रकार के मूल्यों के लिए,

$$a^{m} + a^{n} = a^{m-n}$$

क्योंकि $a^{m} \div a^{n} = \dfrac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m} \times a^{-n} = a^{m-n}$

85. सिद्ध करना है कि m और n के किसी मूल्य के लिए

(i) $(a^{m})^{n} = a^{mn}$

(ii) $(ab)^{n} = a^{n}b^{n}$

(i) पहली स्थिति—जब कि n एक घनात्मक अभिन्न राशि है।

परिभाषा से, $(a^{m})^{n} = a^{m} \times a^{m} \times a^{m} \times$ .... *n factors* तक

$= a^{m+m+m+}$ ....*n factors* तक

$= a^{mn}$.

दूसरी स्थिति—जब कि n एक ऋणात्मक अभिन्न राशि है।

मान लो $n = -p$, जहाँ p एक धनात्मक संख्या है।

$$\therefore \quad (a^{m})^{n} = (a^{m})^{-p} = \frac{1}{(a^{m})^{p}}$$

$$= \frac{1}{a^{mp}} = \frac{1}{a^{-mn}}$$

$$= a^{mn}$$

तीसरी स्थिति—जब कि n एक भिन्न राशि है।

मान लो कि $n = \dfrac{p}{q}$

$$\therefore \quad (a^{m})^{n} = (a^{m})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^{m})^{p}}$$

$$=\sqrt[q]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{q}}$$
$$=a^{mn}$$

अतः हर हालत में $(a^m)^n=a^{mn}$, चाहे n और m कोई भी राशि हो ।

(ii) पहली स्थिति—जब कि n धनात्मक अभिन्न राशि है ।

$$(ab)^n=ab\times ab\times ab\times \quad ...n \textit{ factors } \text{तक})$$
$$=(a\times a\times a\times \quad ....n \textit{ factors } \text{तक})$$
$$=\times(b\times b\times b\times .... n \textit{ factors } \text{तक})$$
$$=a^n\times b^n$$
$$=a^nb^n$$

दूसरी स्थिति—जब कि n ऋणात्मक अभिन्न राशि है ।

मान लो कि $n=-m$, जहाँ m एक धनात्मक राशि है ।

$$\therefore \quad (ab)^n=(ab)^{-m}$$
$$=\frac{1}{(ab)^m}=\frac{1}{a^mb^m}$$
$$=a^{-m}.\ b^{-m}$$
$$=a^n.\ b^n$$

तीसरी स्थिति—जब कि n एक भिन्न राशि है ।

मान लो $n=\frac{p}{q}$, जहाँ q धनात्मक राशि है ।

अब $(a^{\frac{1}{q}}\cdot b^{\frac{1}{q}})^q=(a^{\frac{1}{q}})^q\ (b^{\frac{1}{q}})^q$

$$=a^{\frac{q}{q}}.b^{\frac{q}{q}}$$
$$=a\,b$$

$\therefore$ दोनों तरफ q^{th} मूल लेने पर,

$$(ab)^{\frac{1}{q}}=a^{\frac{1}{q}}.\ b^{\frac{1}{q}}$$

फिर दोनों तरफ p^{th} घातांक चढ़ाने पर,

$$(ab)^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}} \cdot b^{\frac{1}{q}})^p = (a^{\frac{1}{q}})^p \cdot (b^{\frac{1}{q}})^p = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$$

$$\therefore \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$\therefore$ हर हालत में $(ab)^n = a^n b^n$ चाहे n कोई भी राशि हो।

उपसूत्र— $\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n}$

$$= \frac{a^n}{b^n}.$$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. सरल करो—

(i) $(a^8 b^{\frac{5}{3}})^{\frac{-3}{4}}$ (ii) $\frac{x^{-7}}{y^{-5}}$

(iii) $\frac{1}{(\sqrt[3]{a})^{-2}}$

(iv) $a^{-2} x^{-\frac{1}{2}} \div a^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$

(i) दिया हुआ व्यंजक $= (a^8)^{-\frac{3}{4}} \cdot (b^{\frac{5}{3}})^{-}$

$$= a^{8 \times -\frac{3}{4}} \, b^{\frac{5}{3} \times -\frac{3}{4}}$$

$$= a^{-6} \cdot b^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{a^6 \cdot b^{\frac{5}{4}}}$$

(ii) दिया हुआ व्यंजक $= \frac{x^{-7}}{y^{-5}} = \frac{1}{x^7} \div \frac{1}{x^5} = \frac{x^5}{x^7}$

(iii) $\frac{1}{(\sqrt[3]{a})^{-2}} = \frac{1}{(a^{\frac{1}{3}})^{-2}} = \frac{1}{a^{-\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{3}}$

(iv) दिया हुआ व्यंजक $= a^{-2}x^{-\frac{1}{2}} \div a^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \div \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{a^2 . x^{\frac{1}{2}}} . \frac{a^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{3}{2}-2}}{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}x} = \frac{1}{x\sqrt{a}}$$

उदाहरण 2. मूल्य निकालो—

(i) $(16)^{\frac{5}{4}}$ (ii) $(32)^{\frac{3}{5}}$ (iii) $(64)^{-\frac{1}{2}}$

(iv) $(1000)^{-\frac{2}{3}}$ (v) $\frac{81^{-\frac{3}{4}}}{64^{-\frac{2}{3}}}$

(i) दिया हुआ व्यंजक $= (16^{\frac{1}{4}})^5$

$$= \{(2^4)^{\frac{1}{4}}\}^5 = (2)^5 = 32$$

(ii) दिया हुआ व्यंजक $= (32)^{\frac{3}{5}} = (32^{\frac{1}{5}})^3$

$$= \{(2^5)^{\frac{1}{5}}\}^3 = (2)^3 = 8$$

(iii) $(64)^{-\frac{1}{2}} = (64^{\frac{1}{2}})^{-1} = \{(8^2)^{\frac{1}{2}}\}^{-1} = (8)^{-1} = \frac{1}{8}$

(iv) दिया हुआ व्यंजक,

$$= (1000^{\frac{2}{3}})^{-2}$$

$$= \{(10^3)^{\frac{1}{3}-2} = (10)^{-2} = 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{100}$$

(v) दिया हुआ व्यंजक,

$$=\frac{81^{-\frac{3}{4}}}{64^{-\frac{2}{3}}}=\frac{\{(81)^{\frac{1}{4}}\}^{-3}}{\{(64)^{\frac{1}{3}}\}^{-2}}=\frac{\{(3^4)^{\frac{1}{4}}\}^{-3}}{\{(4^3)^{\frac{1}{3}}\}^{-2}}$$

$$=\frac{(3)^{-3}}{(4)^{-2}}=\frac{4^2}{3^3}=\frac{16}{27}$$

उदाहरण 3. सरल करो—

(i) $=\left\{\sqrt[5]{4}\times\frac{1}{\sqrt[10]{8}}\times\sqrt[5]{2^{-1}}\right\}^{30}$ (39A)

(ii) $=\left\{\sqrt[8]{4}\times\frac{1}{\sqrt[6]{8}}\times\sqrt[12]{2^{-1}}\right\}^{\frac{1}{4}}$ (63A)

(i) दिया हुआ व्यंजक,

$$=\left\{4^{\frac{1}{5}}\times\frac{1}{8^{\frac{1}{10}}}\times(2^{-1})^{\frac{1}{5}}\right\}^{30}$$

$$=(4^{\frac{1}{5}})^{30}.\ \frac{1}{(8^{\frac{1}{10}})^{30}}\times(2^{-1})^{\frac{1}{5}\times30}$$

$$=4^6.\frac{1}{8^3}\times(2^6)^{-1}$$

$$=(2^2)^6.\ \frac{1}{(2^3)^3}\times(2^{-1})^6$$

$$=2^{12}.\ \frac{1}{2^9}\quad\frac{1}{2^6}=\frac{2^{12}}{2^{9+6}}$$

$$=\frac{2^{12}}{2^{15}}=\frac{1}{2^{15-12}}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

(ii) दिया हुआ व्यंजक

$$=\left\{4^{\frac{1}{3}}\times\frac{1}{8^{\frac{1}{6}}}\times(2^{-1})^{12}\right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$=(4^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}\times\frac{1}{(8^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{4}}}\times(2^{-1})^{12\times\frac{1}{4}}$$

$$=4^{\frac{1}{12}}\times\frac{1}{8^{\frac{1}{24}}}\times(2^{-1})^{3}$$

$$=2^{2\times\frac{1}{12}}\times\frac{1}{2^{3\times\frac{1}{24}}}\times\frac{1}{2^{3}}$$

$$=2^{\frac{1}{6}}\times\frac{1}{2^{\frac{1}{8}}}\times\frac{1}{2^{3}}$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{6}}}{8^{\frac{1}{8}+3}}=2^{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-3}=2^{\frac{4-3-72}{24}}=2^{\frac{71}{24}}$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{71}{24}}}$$

86. घातांक का गुणा एवं भाग—कभी-कभी घातवाले व्यंजकों को आपस में गुणा या भाग देने में बीजगणित के गुणनखंड वाले सूत्रों का व्यवहार करने से बहुत आसानी होती है, साधित उदहरणों से स्पष्ट होगा। लेकिन यदि दो व्यंजक बीजगणित के गुणनखण्ड वाले सूत्र में आ जायें, तो सीधे गुणा या भाग करने के बजाय सूत्र का ही प्रयोग करना चाहिए।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. गुणा करो— $x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$ को $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$ से।

पहला तरीका—

$$\begin{array}{r} x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y \\ x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}} \\ \hline x^{\frac{3}{2}}+xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y \\ -xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}} \\ \hline x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}} \end{array}$$

दूसरा तरीका—माना कि $x^{\frac{1}{2}}=a,\quad y^{\frac{1}{2}}=b$

$\therefore$ इष्ट गुणनफल $=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=a^3-b^3=(x^{\frac{1}{2}})^3-(y^{\frac{1}{2}})^3$

$=x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}.$

उदाहरण 2. गुणा करो—

(i) $x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}+9y^{\frac{2}{3}}$ को $x^{\frac{2}{3}}-3y^{\frac{1}{3}}$ से। (43A)

(ii) $x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$ को $x^{-1}-x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}+y^{1}$ से।

(29A,

(iii) $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+1$ को $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+1$ से।

(42S)

माना कि $x^{\frac{1}{3}}=a$ और $y^{\frac{1}{3}}=b.$

$\therefore$ इष्ट गुणनफल $=(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$

$=a^3-27b^3$

$$= (x^{\frac{1}{3}})^3 - 27(y^{\frac{1}{3}})^3$$
$$= x - 27y$$

(ii) माना कि $x^{-\frac{1}{2}} = a$ और $x^{-\frac{1}{2}} = b$

$\therefore$ इष्ट गुणनफल $= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

$$= (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2$$
$$= a^4 + a^2b^2 + b^4$$
$$= x^{-2} + x^{-1}.\ y^{-1} + y^{-2}$$
$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}$$

(iii)

$$\begin{array}{r} x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{6}} + 1 \\ \times\, x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} + 1 \\ \hline x + 2x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} \\ - 2x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} \\ + x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{6}} + 1 \\ \hline x \qquad - 2x^{\frac{1}{2}} \qquad + 1 \end{array}$$

$\therefore$ इष्ट गुणनफल $= x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1$

उदाहरण 3. भाग दो—

(i) $x^{-1} + y^{-1}$ को $x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}}$ से।

(ii) $x^{-\frac{4}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} + y^{-\frac{4}{3}}$ को $x^{-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{2}{3}}$ से

(i) मान लो कि $x^{-\frac{1}{3}} = a$ और $y^{-\frac{1}{3}} = b$.

$\therefore$ इष्ट भागफल $=\dfrac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$

$=x^{-\frac{2}{3}}-{}^{-\frac{1}{3}}.\,y^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$

(ii) मान लिया कि $x^{-\frac{1}{3}}=a$ और $y^{-\frac{1}{3}}\ b$

$\therefore$ इष्ट भागफल $=\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2+ab+b^2}$

$=\dfrac{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)}$

$=a^2-ab+b^2$

$=x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$

उदाहरण 4. हल करो—

(i) $\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}+\left(\dfrac{x^a}{x^{a-b}}\right)^b$ (H.S. 61A)

(ii) $\left(\dfrac{a^l}{b^m}\right)^n\cdot\left(\dfrac{b^n}{c^l}\right)^m\cdot\left(\dfrac{c^m}{a^n}\right)^l$

(i) दी हुई राशि $=\{x^{(a-b)}\}^{a+b}\div\{x^{(a-a+b)}\}^b$

$=x^{a^2-b^2}\div x^{b^2}$

$=x^{a^2-b^2}\times\dfrac{1}{x^{b^2}}$

$=\dfrac{x^{a^2-b^2}}{x^{b^2}}=x^{a^2-2b^2}$

(ii) दी हुई राशी $=\dfrac{a^{nl}}{b^{mn}}\cdot\dfrac{b^{mn}}{c^{lm}}\cdot\dfrac{c^{lm}}{a^{nl}}=1$

उदाहरण 5. $a-b$ को $a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}$ से भाग दो। **(43S)**

$$a-b=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2$$

$$=(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})$$

और $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{\frac{1}{4}})^2$

$$=(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})$$

अतः $\dfrac{x-b}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})}{(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})}$

$$=(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})$$

उदाहरण 6. $a-b+c+3a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}.c^{\frac{1}{3}}$ को $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$ से भाग दो।

हम जानते हैं कि,

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

इस सूत्र में b के वदले $-b$ रखने पर,

$$a^3-b^3+c^3+3abc$$

$$=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$$

अतः $a-b+c+3a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}.c^{\frac{1}{3}}$

$$=(a^{\frac{1}{3}})^3+(-b^{\frac{1}{3}})^3+(-c^{\frac{1}{3}})^3+3a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}.c^{\frac{1}{3}}$$

$$=(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}.c^{\frac{1}{3}})$$

$$\therefore \quad \frac{a-b+c+3a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}.c^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}.c^{\frac{1}{3}})}{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})}$$

$$=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}.c^{\frac{1}{3}})$$

EXAMPLE 66.

मान निकालो—

1. $(216)^{\frac{2}{3}}$ 2. $(1000)^{-\frac{2}{3}}$ 3. $\frac{1}{6^{-2}}$

4. $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$ 5. $(a^{-\frac{3}{4}})^8$ 6. $\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{3}{4}}$

7. $(a^{-\frac{1}{2}}b^{-3})^{-2}$ 8. $(\sqrt[3]{a^4b^3})^6$ 9. $(\sqrt[6]{x^9 5^{-8}})^{-8}$

10. $\sqrt[8]{x^2.\sqrt[4]{x^{-3}}}$ 11. $\sqrt[4]{a^{-3}b^4}\times\sqrt[4]{a^2.b^{-8}}$

12. $\sqrt[4]{a^{-2}\sqrt{y^5}}\times\sqrt{x.\sqrt[4]{y^3}}$

13. $\sqrt[3]{a^6b^{-2}c^{-4}}\times\sqrt[4]{a^{-6}.b^4c^8}$

14. $\sqrt{a^{-\frac{2}{3}}.b^4c^{-\frac{1}{3}}}\div\sqrt[3]{a^2b^4c^{-1}}$

15. $\sqrt{ab^{-2}c^3}\div(\sqrt[3]{a^3b^2c^{-3}})^{-1}$

16. $\left(\frac{a^{-1}b^2}{a^2b^{-4}}\right)^7\div\left(\frac{a^3b^{-5}}{a^{-2}b^3}\right)^{-5}$ (58A, 60S)

गुणा करो—

17. $a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$ को $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$ से

18. $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$ को $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$ से

19. $1+ab^{-1}+ab^{-2}$ को $1-ab^{-1}+a^{2}b^{-2}$ से

20. $x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$ को $x^{-1}-x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$ से (29A)

21. $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+1$ को $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+1+$ से (42S)

22. $a^{m}+3b^{n}-2c^{p}$ को $a^{m}-3b^{n}+2c^{p}$ से

भाग दो—

23. $x^{2}+2+x^{-2}$ को $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}-1$ से

24. $x^{-1}+y^{-1}$ को $x^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{1}{3}}$ से

25. $x^{3}+a^{3}+x^{\frac{3}{2}}.a^{\frac{3}{2}}$ को $x^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{3}{8}}.a^{\frac{3}{8}}$ से (42A)

26. $x^{\frac{3n}{a}}+a^{\frac{3n}{2}}$ को $x^{\frac{n}{2}}-a^{\frac{n}{2}}$ से

27. वर्ग निकालो— (i) $x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$

(ii) $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}$

(iii) $\sqrt{x}-1+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

28. $\left(\frac{a^{l}}{b^{m}}\right)^{n}.\left(\frac{b^{n}}{c^{l}}\right)^{m}.\left(\frac{c^{m}}{a^{n}}\right)^{l}$

29. $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \div \left(\frac{x^a}{x^{a-c}}\right)^b$ (H.S. 61A)

30. $(x^l)^{(m-n)} \cdot (x^m)^{(n-l)} \cdot (x^n)^{(l-m)}$

31. $\left\{\left(a^m\right)^{m-\frac{l}{m}}\right\}^{\frac{l}{m+1}}$

विविध उदाहरण

उदाहरण 1. सरल करो—

(i) $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n} \times \left(\frac{x^m}{x^l}\right)^{m+l} \times \left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}$

(44A, 61, H.S. 61S)

(ii) $\sqrt[ab]{\frac{x^b}{x^c}} \times \sqrt{\frac{x^c}{x^a}} \times \sqrt[ab]{\frac{x^a}{x^b}}$ (38A, 48S, 67A, 66S, H.S. 64S)

(iii) $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-l} \times \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l-m} \times \left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m-n}$

(28A, 64A, 65S)

(iv) $\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l^2+lm+m^2} \times \left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m^2+mn+n^2}$

$\times \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n^2+nl+l^2}$. (50S, 56S, 52A)

(v) $\dfrac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^m \cdot \left(p-\frac{1}{q}\right)^m}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^m \cdot \left(q-\frac{1}{p}\right)^m}$

(vi) $$\frac{\left(p^2 - \frac{1}{q^2}\right)^q \cdot \left(p - \frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2 - \frac{1}{p^2}\right)^p \cdot \left(q + \frac{1}{p}\right)^{p-q}}$$

(vii) $$\frac{1}{1 + x^{m-n} + x^{m-p}} + \frac{1}{1 + x^{n-m} + x^{n-p}} + \frac{1}{1 + x^{p-m} + x^{p-n}}$$ (50A, H.S. 60A)

(i) दी हुई राशि $= x^{(m-n)(m+n)} \times x^{(n-l)(n+l)} \times x^{(l-m)(l+m)}$

$= x^{m^2-n^2} \times x^{n^2-l^2} \times x^{l^2-m^2}$

$= x^{m^2-n^2+n^2-l^2+l^2-m^2}$

$= x^0 = 1$

(ii) दी हुई राशि $= x^{\frac{b-c}{bc}} \times x^{\frac{c-a}{ca}} \times x^{\frac{a-b}{ab}}$

$= x^{\frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca} + \frac{a-b}{ab}}$

$= x^{\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{abc}}$

$= x^0 = 1$

(iii) दी हुई राशि $= x^{(m-n)(m+n-l)} \times x^{(n-l)(n+l-m)} \times x^{(l-m)(l+m-n)}$

$= x^{(m-n)(m+n-l)+(n-l)(n+l-m)+(l+m)(l+m-n)}$

$= x^{m^2-n^2-ml+nl+n^2-l^2-mn+ml+l^2-m^2-nl+mn}$

$= x^0 = 1$

iv) दी हुई राशि,

$$= x^{(l-m)(l^2+ml+m^2)}$$

$$\times x^{(m-n)(m^2+mn+n^2)} \times x^{(n-l)(n^2+nl+l^2)}$$

$$= x^{l^3-m^3} \times x^{m^3-n^3} \times x^{n^3-l^3}$$

$$= x^{l^3-m^3+m^3-n^3+n^3-l^3} = x^0 = 1$$

(v) दी हुई राशि,

$$= \frac{\left(\frac{pq+1}{q}\right)^m \cdot \left(\frac{pq-1}{q}\right)^m}{\left(\frac{pq+1}{p}\right)^m \cdot \left(\frac{pq-1}{p}\right)^m} = \frac{\frac{(pq+1)^m . (pq-1)^m}{q^m . q^m .}}{\frac{(pq+1)^m . (pq-1)^m}{p^m . p^m}}$$

$$= \frac{\frac{1}{q^{2m}}}{\frac{1}{p^{2m}}} = \frac{p^{2m}}{q^{2m}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{2m}$$

(vi) दी हुई राशि,

$$= \frac{\left(\frac{p^2q^2-1}{q^2}\right)^p \cdot \left(\frac{pq-1}{q}\right)^{q-p}}{\left(\frac{p^2q^2-1}{p^2}\right)^q \cdot \left(\frac{pq+1}{p}\right)^{p-q}}$$

$$= \frac{\frac{(pq-1)^p . (pq+1)^p}{q^{2p}} \cdot \frac{(pq-1)^{q-p}}{q^{q-p}}}{\frac{(pq-1)^q . (pq+1)^q}{p^{2q}} \cdot \frac{(pq+1)^{p-q}}{p^{p-q}}}$$

$$= \frac{\frac{(pq-1)^{p+q-p} . (pq+1)^p}{q^{2p+q-p}}}{\frac{(pq+1)^{q+p-q} . (pq-1)^q .}{p^{2q+p-q}}}$$

$$=\frac{\dfrac{(pq-1)^q.(pq+1)^p}{q^{p+q}}}{\dfrac{(pq-1)^q.(pq+1)^q}{p^{p+q}}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{q^{p+q}}}{\dfrac{1}{p^{p+q}}}=\left(\frac{p}{b}\right)^{p+q}$$

(vii) पहला पद

$$=\frac{1}{1+x^{m-n}+x^{m-p}}$$

$$=\frac{x^{-m}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}$$ { अंश और हर में x^{-m} से गुणा करने पर,

इसी प्रकार दूसरे तथा तीसरे में क्रमशः x^{-n} और x^{-p} से गुणा करने पर,

दूसरा पद $=\dfrac{x^{-n}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}$

और तीसरा पद $=\dfrac{x^{-p}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}$

∴ इष्ट योगफल $=\dfrac{x^{-m}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}$

$$+\frac{x^{-n}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}+\frac{x^{-p}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}$$

$$=\frac{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}{x^{-m}-x^{-n}+x^{-p}}=1.$$

उदाहरण 2. यदि $x=3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}$;

तो सिद्ध करो कि $3x^3-9x=10$ (H.S. 63A)

$\because \quad x=3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}$

$\therefore \quad x^3=3+3^{-1}+3.(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}})$

या, $x^3=3+\frac{1}{3}+3x$

या, $x^3=\dfrac{9+1+9x}{3}$

या, $3x^3-9x=19$ proved.

उदाहरण 3. यदि $a^2+2=5^{\frac{2}{3}}+5^{-\frac{2}{3}}$,

तो साबित करो कि $5a^3+15a=24$ (62A)

$\because \quad a+2=5^{\frac{2}{3}}+5^{-\frac{2}{3}}$

$\therefore \quad a^2=5^{\frac{2}{3}}-2+5^{-\frac{2}{3}}$

$=(5^{\frac{1}{3}})^2-2.5^{\frac{1}{3}}.5^{-\frac{1}{3}}+(5^{-\frac{1}{3}})^2$

$=(5^{\frac{1}{3}}-5^{-\frac{1}{3}})^2$

$\therefore \quad a=(5^{\frac{1}{3}}-5^{-\frac{1}{3}})^2$

$\therefore \quad a^3=5-5^{-1}-3(5^{\frac{1}{3}}-5^{-\frac{1}{3}})$

$=5-\frac{1}{5}-3a$

$\therefore \quad 5a^3+15a=24$ proved.

उदाहरण 4. यदि $x=3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}$;

तो साबित करो कि $3x^3+9x=8$ (H.S. 65)

$\because \quad x=3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}$

$\therefore \quad x^3 = 3 - 3^{-1} - 3(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}})$

या, $x^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3x$

या, $3x^3 = 9 - 1 - 9x$

या, $3x^3 + 9x = 8$ proved.

उदाहरण 5. अगर $x + 4x^{-1} = 4$,

तो साबित करो कि $x^5 + x^{-5} = 32\frac{1}{32}$ (S.S. 68A)

$\because \quad x + 4x^{-1} = 4$

या, $x + \frac{4}{x} = 4$

या, $x^2 - 4x + 4 = 0$

या, $(x-2)^2 = 0; \qquad x = 2$

$\therefore \quad x^5 = 2^5 = 32$

और $x^{-5} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

$\therefore \quad x^5 + x^{-5} = 32 + \frac{1}{32} = 32\frac{1}{32}$

EXAMPLE 67

सरल करो—

1. $\left(\frac{x^{a^2+b^2}}{x^{ab}}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^{b^2+c^2}}{x^{bc}}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^{c^2+a^2}}{x^{ca}}\right)^{ca}$ (35A)

2. $(x^l)^{m-n} \times (x^m)^{n-l} \times (x^n)^{l-m}$

3. $\left(\frac{a^x}{b^y}\right)^z \times \left(\frac{b^x}{c^x}\right)^y \times \left(\frac{c^y}{a^x}\right)^x$

4. $\frac{x+y+z}{x^{-1}y^{-1} + y^{-1}z^{-1} + z^{-1}x^{-1}}$

5. $\left(\frac{x^{a+b}}{x^c}\right)^{a-b} \times \left(\frac{x^{c+a}}{x^b}\right)^{c-a} \times \left(\frac{x^{b+c}}{x^a}\right)^{b-c}$ (49A)

6. $\left(\frac{x^{b+c}}{x^{c-a}}\right)^{\frac{1}{a+b}} \times \left(\frac{x^{c+a}}{x^{a-b}}\right)^{\frac{1}{b+c}} \times \left(\frac{x^{a+b}}{x^{b-c}}\right)^{\frac{1}{c+a}}$ (H.S. 63S)

7. $\left(\frac{x^{b+c}}{x^{2a}}\right)\left(\frac{x^{c+a}}{x^{2b}}\right)\left(\frac{x^{a+b}}{x^{2c}}\right)$ (49S)

8. $\frac{(x^{a+b})^2(x^{b+c})^2.(x^{c+a})^2}{(x^a x^b x^c)^4}$ (55S, 57S, 61S)

9. $\frac{(x^a)^2}{x^{b+c}} \times \frac{(x^b)^2}{x^{c+a}} \times \frac{(x^c)^2}{x^{a+b}}$

10. $\left(x^{\frac{1}{a-b}}\right)^{\frac{1}{a-c}} \times \left(x^{\frac{1}{b-c}}\right)^{\frac{1}{b-a}} \times \left(x^{\frac{1}{c-a}}\right)^{\frac{1}{c-b}}$

11. $\left(\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}\right)$

12. $\frac{2^{\frac{1}{3}}.\ 12^{\frac{1}{3}}.\ 27^{\frac{1}{2}}.\ 5^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{1}{3}}.\ 4^{\frac{1}{3}}.\ 10^{\frac{1}{2}}.\ 81^{\frac{1}{4}}}$ (S.S. 55A)

13. $\frac{5^{-n} \times (5^2)^{2n-2}}{5^{3n-2} - 10^{-1}}$

14. $\left\{\sqrt[5]{4} \times \frac{1}{\sqrt[10]{8}} \times \sqrt[15]{2^{-1}}\right\}^{30}$

15. यदि $x = a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3 + 3x = a - \frac{1}{a}$

(S.S. 67A)

16. यदि $a^b = b^a$ हो, तो सिद्ध करो कि $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b} - 1}$; और

यदि $a = 2b$ हो, तो सिद्ध करो कि $b = 2$

17. यदि $x=2+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{2}{3}}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$x^3-6x^2+3x-2=0$$

18. यदि $x=1+2^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$2x^2-4x-7=0$$

19. यदि $x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$x^3-6x^2+6x-2=0$$

20. सिद्ध करो कि—

$$\frac{x^{2n}-y^{2n}}{x-y}=(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)....(x^{2n-1}+y^{2n-1})$$

21. सिद्ध करो कि—

$$\frac{x^{3n}}{x^n-1}-\frac{x^{2n}}{x^n+1}-\frac{1}{x^n-1}+\frac{1}{x^n+1}, \text{ जब } x=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

22. सिद्ध करो $\frac{y^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}+\frac{y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}=\frac{2xy}{y^2-x^2}$

23. मान निकालिये $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$, जब $x=\frac{2ab}{b^2+1}$

24. यदि $x=a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}$, सिद्ध करो कि $x^2=3x=a+a^{-1}$

25. यदि $a^3-b^3+c^3=(a+b+c)^3$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=(a+b+c)^{2n+1}$, जब कि n एक धनात्मक अभिन्न है।

संकेत—हम जानते हैं कि,

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$$

लेकिन $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$

$\therefore \quad 3(b+c)(c+a)(a+b)=0$

$\therefore \quad b+c=0;\ \ c+a=0$ और $a+b=0$

$\therefore \quad b = -c; \; c = -a$ और $a = -b$

$\therefore \quad (-b)^{2n+1} = (-c)^{2n+1} = (-1)^{2n+1}c^{2n+1} = -c^{2n+1}$

$\therefore \quad b^{2n+1} = c^{2n+1} = 0$

अत: $L.H.S. = a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}$

$= a^{2n+1} \qquad (\because \quad b^{2n+1} + c^{2n+1} = 0)$

फिर $R.H.S. = (a+b+c)^{2n+1}$

$= (a+c)^{2n+1} = a^{2n+1}, \quad (b+c=0)$

$\therefore \quad L.H.S. = R.H.S.$

26. यदि $x = \{r + \sqrt{r^2+p^3}\}^{\frac{1}{3}} + \{r - \sqrt{r^2+p^3}\}^{\frac{1}{3}}$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3 + 3px - 2r = 0$

27. यदि $x^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$, तो सिद्ध करो कि $3x^3 + 9x - 8 = 0$

87. चल घातवाले समीकरण (Exponential Equations)—जिस समीकरण में एक या अनेक चल घात (*Indices or exponents*) हों, उसे चल घातवाले समीकरण (*Exponential Equation*) कहते हैं। उदाहरण के लिए,

$3^x = 27; \; 81^x = 9^{x+1}$ आदि चल घात वाले युगपत समीकरण हैं।

चल घातवाले समीकरणों को हल करने की रीति नीचे दी हुई दो स्वयंसिद्धियों (*axioms*) के अनुसार है—

1. a का चाहे कोई मूल्य हो, यदि $a^x = a^m$ हो, तो $x = m$ होगा।

अत: चल घातवाले समीकरणों को हल करने में दो बातें ध्यान देने की हैं—

(i) समीकरण के दोनों पक्षों को एक रूप में लाना,

(ii) और उनके चल घातों का समीकरण करना।

नीचे दिये हुए साधित उदाहरणों से यह रीति स्पष्ट हो जायेगी।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. हल करो— (i) $2^{x+1}=2^{2x-3}$

(ii) $2^{x+9}=4^{x+3}$ (iii) $2^{x+7}=2^{x+5}+3$

(i) $\because$ यहाँ दोनों पक्षों का आधार बरावर हैं।

अत: $x+1=2x-3$

$\therefore \quad -x=-4$

$\therefore \quad x=4$

(ii) दिये हुए समीकरण से,

$2^{x+9}=(2^2)^{x+3}$

या, $2^{x+9}=2^{2x+6}$

$\therefore \quad x+9=2x+6$

$\therefore \quad -x=-3$

$\therefore \quad x=3$

(iii) दिये हुए समीकरण से,

$2^{x+7}=2^{x+5}+3$

या $2^x.2^7=2^x.2^5+3$

मान लो कि $2^x=a$

$\therefore \quad a\cdot 2^7=a\cdot 2^5+3$

या, $128a=32a+3$

या, $96a=3$

$\therefore \quad a=\frac{3}{96}=\frac{1}{32}=2^{\frac{1}{5}}=2^{-5}$

$\therefore \quad 2^x=2^{-5}$

$\therefore \quad x=-5$

उदाहरण 2. हल करो—

(i) $2^x+3^y=4$

$2^{x+1}+3^{y+1}=1$

(ii) $2^{x+y+z}=8^{x+z-y}$

$5^{3y+2}=25^{x+z}$

$3^{2x+2z+y}=9^{2x+7}$

(i) इसके दूसरे समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा,

$$2^x.2+3^y.3=1$$

माना कि $2^x=a$ और $3^y=b$

$\therefore$ (i) के समीकरणों का निम्न रूप होगा

$$a+b-4=0$$

$$2a+3b-1=0$$

बज्राभ्यास प्रणाली से,

$$\frac{a}{(-11)-(-4\times 3)}=\frac{b}{(2)(-4)-(-11)}$$

$$=\frac{1}{3\times 1-2\times 1}$$

या, $$\frac{a}{-11+12}=\frac{b}{-8+11}=\frac{1}{3-2}$$

या, $$\frac{a}{1}=\frac{b}{3}=1$$

$\therefore$ $a=1$ और $b=3$

लेकिन $a=2^x$ और $b=3^y$, तो

$$2^x=1=2^0$$

$\therefore$ $x=0$

और $3^y=3^1$

$\therefore$ $y=1$

$x=0$ और $y=1$

(ii) पहले समीकरण से,

$$2^{x+y+z}=2^{3(x+z-y)}$$

$\therefore \quad x+y+z=3x+3z-3y$

या, $\quad 2x-4y+2z=0$ ....(i)

दूसरे समीकरण से,

$$5^{3y+2}=5^{2(x+z)}$$

$\therefore \quad 3y+2=2x+2z$

या, $\quad 2x-3y+2z=2$ ....(ii)

तीसरे समीकरण से,

$$3^{2x+2z+y}=3^{2(3x+y)}$$

$\therefore \quad 2x+2z+y=6x+2y$

$\therefore \quad 4x+y-2z=0$ ...(iii)

इस प्रकार,

$2x-4y+2z=0$ ....(i)

$2x-3y+2z=2$ ....(ii)

$4x+y-2z=0$ ....(iii)

पहले और तीसरे के वज्राभ्यास प्रणाली से,

$$\frac{x}{(-4)(-2)-2\times 1}=\frac{y}{2\times 4-2(-2)}=\frac{z}{2\times 1-4(-4)}$$

या, $\quad \frac{x}{8-2}=\frac{y}{8+4}=\frac{z}{2+16}$

या, $\quad \frac{x}{6}=\frac{y}{12}=\frac{z}{18}$

या, $\quad \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=k$ (मान लो)

$\therefore \quad x=k, \quad y=2k, \quad z=3k$

x, y, z के इन मूल्यों को (ii) में रखने पर

$2k-6k+6k=2$

या, $2k=2$

$\therefore \quad k=1$

$\therefore \quad x=1, y=2, z=3$

उदाहरण 3. यदि $x^y=y^x$ हो, तो साबित करो कि

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=x^{\frac{x}{y}-1} \quad (45\ A)$$

$\because \quad x^y=y^x$

$\therefore \quad x=y^{\frac{x}{y}}$

अब $$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=\frac{x^{\frac{x}{y}}}{y^{\frac{x}{y}}}=\frac{x^{\frac{x}{y}}}{x}=x^{\frac{x}{y}-1}$$

उदाहरण 4. यदि $a^x=m$, $a^y=n$ और $a^z=(m^yn^x)^z$ हो, तो सिद्ध करो कि $xyz=1$ (P.U. 19, 21, 45S)

$\because \quad m=a^x$

$\therefore \quad m^y=a^{xy}$

फिर $\because \quad n=a^y$

$\therefore \quad n^x=x^{xy}$

प्रश्न के अनुसार, $(m^y\cdot n^x)^z=a^2$

या, $(a^{xy}.a^{xy})^z=a^2$

या, $a^{2xyz}=a^2$

$\therefore \quad 2xyz=2; \qquad \therefore \quad xyz=1$

उदाहरण 5. यदि $xy^{p-1}=a$; $xy^{q-1}=b$; $xy^{r-1}=c$, तो दिखाओ कि $a^{q-r}.\ b^{r-p}.\ c^{p-q}=1$ (P.U 20)

$\because \quad a=xy^{p-1}$

$\therefore \quad a^{q-r}=x^{q-r}.y^{(p-1)(q-r)}$

उसी प्रकार $b^{r-p} = x^{r-p}.y^{(r-p)(q-1)}$

$c^{p-q} = x^{p-q}.y^{(r-1)(p-q)}$

$\therefore \quad a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q} = x^{(q-r)}y^{(q-r)(p-1)}$

$\times x^{(r-p)}.y^{(r-p)(q-1)} \times x^{(p-q)}y^{(p-q)(r-1)}$

$= x^{q-r+r-p+p-q}$

$\times y^{(q-r)(p-1)+(r-p)(q-1)+(p-q)(r-1)}$

$= x^{0}y^{qp-q-rp+r+rq-r-pq+p+pr-p-qr+q}$

$= x^{0}.y^{0}$

$= 1 \times 1 = 1$ Proved.

उदाहरण 6. यदि $a^{x} = bc$, $b^{y} = ca$ तथा $c^{z} = ab$ हो, तो साबित करो कि—

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 1$$

$\because \quad a^{x} = bc; \; a^{x} \times a = abc$

$\therefore \quad a^{x+1} = abc$

$\therefore \quad a = (abc)^{\frac{1}{x+1}}$

उसी प्रकार, $b = (abc)^{\frac{1}{y+1}}$

और $c = (abc)^{\frac{1}{z+4}}$

$\therefore \quad (abc)^{\frac{1}{x+1}}.(abc)^{\frac{1}{y+1}}.(abc)^{\frac{1}{z+1}} = (abc)^{1}$

या, $(abc)^{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}} = (abc)^{1}$

$\therefore \quad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$ Proved

EXAMPLE 68

हल करो—

1. $2^{2x-1} = 2^{1-x}$
2. $(\sqrt{5})^{x+4} = (\sqrt[3]{25})^{2x+5}$
3. $2^{x-2} + 2^{3-x} = 3$
4. $2^{x+7} = 4^{x+2}$
5. $(\sqrt{3})^{x+5} = (\sqrt[3]{3})^{2x+5}$
6. $(\sqrt[5]{4})^{4x+} = 7(\sqrt[11]{64})^{2x+7}$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{cx-d} = \left(\frac{b}{a}\right)^{ax-b}$
8. $2^{x+1} - 2^{x} - 8 = 0$
9. $3^{x+5} = 3^{x+3} + \frac{8}{3}$
10. $4^{x+2} = 2^{2x+1} + 14$
11. $3^{x-1} = 3^{x-3} + 8$
12. $3^{x+5} = 3^{x+3} + 2^{3}$
13. $2^{2x+1} + 4^{x+2} = 36$
14. $x^{y} = y^{x}$
    $x = 2y$
15. $2^{x+1}.3^{y+2} = \frac{1}{6}$
    $2^{2x+1}.3^{3y+5} = \frac{1}{648}$
16. $a^{x+1}.a^{y+2} = a^{8}$
    $a^{x+1}a^{2(y+1)} = a^{11}$
17. $2^{x}.3^{y} = 18$
    $2^{2x}.3^{y} = 36$
18. $x^{2x+1} = 2y^{x}$
    $x^{y-4} = 1$
19. $x^{y+na} = y^{x+nb}$
    $x^{a} = y^{b}$
20. $2^{x+1}.2^{y+2} = 2^{3}$
    $2^{x+1}.2^{2(y+1)} = 2^{11}$
21. $2^{x+y} = 32$
    $3^{x-y} = 3$
22. $4^{x} = 2^{y+1}$
    $4^{y} = 8^{x}$
23. $x = 2y$
    $x^{y} = y^{x}$
24. /यदि $a = b^{x}$, $b = c^{y}$, $c = a^{z}$ हो, तो सिद्ध करो कि $xyz = 1$
25. $a^{x} = b^{y} = c^{z}$ तथा $b^{2} = ac$ हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$
26. यदि $ab^{x-1} = m$, $ab^{y-1} = n$ और $ab^{z-1} = p$, तो सिद्ध करो कि $m^{y-z}.n^{z-x}.p^{x-y} = 1$ (H.S. 62A)

27. यदि $a^{m^n} = (a^m)^n$ हो, तो m को n के पदों में निकालो। (P.U 18)

28. यदि $x^a = y^b$ और $y^a = x^b$ हो, तो सिद्ध करो कि $x = y$

29. यदि $m^x = z^y$ और $m^z = z^x$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^2 = yz$

30. यदि $a^x = b$, $b^y = c$ तथा $c^z = a$ हो, तो सिद्ध करो कि $xyz = 1$ (60A)

Hints $\because \quad c = b^y$ और $b = a^x$

$$\therefore \quad c = b^y = (a^x)^y$$

$$\therefore \quad c^z = \{(a^x)^y\}^z = a^{xyz}$$

$\therefore$ प्रश्न के अनुसार, $a^{xyz} = a$

$$\therefore \quad xyz = 1$$

31. यदि $a = b^{2x}$, $b = c^{2y}$, $c = a^{2z}$, तो साबित करो कि $xyz = \frac{1}{8}$

32. यदि $a = x^{m+n} y^l$, $b = x^{n+l} y^m$ और $c = x^{l+m} y^n$, तो साबित करो कि $a^{m-n} \cdot b^{n-l} \cdot c^{l-m} = 1$

33. यदि $a^x = m$, $a^y = n$ और $a^2 = (m^y n^x)^z$ हो, तो सिद्ध करो कि $xyz = 1$

34. यदि $xy^{p-1} = a$, $xy^{q-1} = b$, $xy^{r-1} = c$, तो सिद्ध करो कि $a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q} = 1$

35. यदि $a^x = b^y = c^z$ और $b^2 = ac$, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$$

36. यदि $x = a^{q+r} \cdot b^p$, $y = a^{r+p} \cdot b^q$, $z = a^{p+q} \cdot b^r$, तो सिद्ध करो कि $x^{q-r} \cdot y^{r-p} \cdot z^{p-q} = 1$

37. $(\sqrt[5]{9})^{4x+3} = (\sqrt[7]{3})^{2x+49}$ हो, तो x का मान निकालो।

38. x के किस मान के लिए

$\sqrt{x+3} - \sqrt{x+4} = \sqrt{2x+7}$ (H.S. 68A)

संकेत—दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$x + 3 + x + 4 - 2\sqrt{(x+3)(x+4)} = 2x + 7$$

या, $\sqrt{(x^2 + 7x} + 12 = 0$

$\therefore$ $x^2 + 7x + 12 = 0$

या, $x^2 + 3x + 4x + 12 = 0$

या, $(x+3)(x+4) = 0$

$\therefore$ $x = -3$ या -4

तेइस

करणी राशियाँ
(Surds)

88. परिभाषा—निम्नलिखित संख्याओं पर विचार करो। $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ $\sqrt{5}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[4]{9}$ आदि। ये संख्याए ऐसी हैं जिनको पूर्ण संख्या या पूर्ण भिन्न के रूप में प्रकट नहीं कर सकते हैं। ये संख्याए अथवा राशियाँ करणी राशियाँ (*Surds*) कहलाती हैं।

अत: जब किसी संख्या का मूल निश्चिततापूर्वक नहीं निकाला जा सके, तब उसे करणी (*Surd*) अथवा अमूलक संख्या (*Irrational quantity*) कहते हैं।

नोट—जो संख्या करणी या अमूलक संख्या नहीं है, उसे मूलक संख्या (*Rational quantity*) कहते हैं। अतएव अङ्कगणित की प्रत्येक संख्या अथवा अंश या तो मूलक या अमूलक संख्या होती है। कुछ राशियाँ ऐसी हैं जो वास्तव में करणी नहीं हैं, पर देखने में करणी जैसी लगती हैं। जैसे, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}, \sqrt[3]{8}$ आदि केवल रूप में करणी हैं; पर वास्तव में करणी नहीं हैं; क्योंकि $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$ और $\sqrt[3]{8}=2$ पूर्ण संख्याए हैं।

89. मूलक तथा अमूलक अंकों के गुणनफल को एक पूर्ण करणी के रूप में व्यक्त करना—

[जो करणी किसी मूलक से युक्त नहीं रहता उसे पूर्ण करणी (*Complete surd*) कहते हैं। जैसे $\sqrt{50}, \sqrt{75}, \sqrt[8]{x^4}$ आदि पूर्ण करणियाँ हैं, किन्तु $5\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, x\sqrt[3]{x}$ आदि पूर्ण नहीं हैं।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. (i) $5\sqrt{3}$, (ii) $2\sqrt[3]{9}$, (iii) $4\sqrt[3]{5}$.

(i) $5\sqrt{3}=(5^2)^{\frac{1}{2}}.\ 3^{\frac{1}{2}}=(5^2.3)^{\frac{1}{2}}$

$=(75)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{75}$

(ii) $2\sqrt[3]{9}=2.9^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}.\ 9^{\frac{1}{3}}=(7.2)^{\frac{1}{3}}$

$=\sqrt[3]{72}$

(iii) $4\sqrt[3]{5}=4.5^{\frac{1}{3}}=(4^3)^{\frac{1}{3}}5.^{\frac{1}{3}}=(320)^{\frac{1}{3}}$

$=\sqrt[3]{320}$

90. करणी को एक मूलक संख्या तथा अमूलक संख्या के गुणनफल के रूप में प्रकट करना—

साधित उदाहरण

उदाहरण— (i) $\sqrt{18}$ (ii) $\sqrt{80}$ (iii) $\sqrt{a^6b}$

(i) $\sqrt{18}=\sqrt{9\times 2}=(9\times 2)^{\frac{1}{2}}$

$=(3^2)^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}$

$=3\sqrt{2}$

(ii) $\sqrt{80}=\sqrt{16\times 5}=(16\times 6)^{\frac{1}{2}}$

$=(4^2)^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{2}}$

$=4\sqrt{5}$

(iii) $\sqrt[4]{a^6b}=(a^6b)^{\frac{1}{4}}=(a^4\cdot a^2b)^{\frac{1}{4}}$

$$=(a^4)^{\frac{1}{4}}(a^2b)^{\frac{1}{4}}$$

$$=a\sqrt{a^2b}.$$

91. सदृश करणी (Similar Surds)—जब दो या दो से अधिक करणियाँ एक ही अमूलक गुणनखंड में परिवर्तित होती हैं, तब उन्हें सदृश करणी कहते हैं। जैसे $\sqrt{45}$ तथा $\sqrt{80}$ दो सदृश करणियाँ हैं। क्योंकि—

$$\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

92. सदृश करणियों के जोड़ घटाव—सदृश करणियों का जोड़, या घटाव साधारण अङ्कगणित के तरीकों के जैसा हो है।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. सरल करो—

(i) $\sqrt{12}+\sqrt{75}$ (ii) $\sqrt{98}-\sqrt{50}$

(iii) $2\sqrt{18}-4\sqrt{32}+6\sqrt{128}$

(i) $\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\sqrt{75}=\sqrt{25\times 3}=\sqrt{25}\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

$\therefore\ \sqrt{12}+\sqrt{75}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=\sqrt{3}(2+5)=7\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{98}=\sqrt{49\times 2}=\sqrt{49}\times\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

$\sqrt{50}=\sqrt{25\times 2}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

$\therefore\ \sqrt{98}-\sqrt{50}=7\sqrt{2}-5\sqrt{2}=\sqrt{2}(7-5)$

$=2\sqrt{2}$

(ii) $2\sqrt{18}=2\sqrt{9\times 2}=\times 2\sqrt{9}\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

$4\sqrt{32}=4\sqrt{16}\times 2=4\times\sqrt{16}\times\sqrt{2}=16\sqrt{2}$

$6\sqrt{128}=6\sqrt{64}\times 2=6\times\sqrt{64}\times\sqrt{2}=48\sqrt{2}$

$\therefore\quad 2\sqrt{18}-4\sqrt{32}+6\sqrt{128}=6\sqrt{2}-16\sqrt{2}+44\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}(6+16+48)$

$=38\sqrt{2}$

उदाहरण 2. सरल करो—

(i) $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{96}$

(ii) $2\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

(iii) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{-375}-\sqrt[3]{192}$

(i) $\sqrt{24}=\sqrt{4\times 6}=\sqrt{4}\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

$\sqrt{54}=\sqrt{9\times 6}=\sqrt{9}\times\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

$\sqrt{96}=\sqrt{16\times 6}=\sqrt{16}\times\sqrt{6}=4\sqrt{6}$

$\therefore\quad \sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{96}=2\sqrt{6}+3\sqrt{6}-4\sqrt{6}$

$=\sqrt{6}(2+3-4)=\sqrt{6}$

(ii) $2\sqrt[3]{128}=2\sqrt[3]{64\times 2}=2\sqrt[3]{64}\times\sqrt[3]{2}$

$=2\cdot 4\cdot\sqrt[3]{2}=8\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{125\times 2}=\sqrt[3]{125}\times\sqrt[3]{2}=5\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{\frac{2}{8}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\times{}^{3}/2=\frac{1}{2}\,{}^{3}/2$

$\therefore\quad 2\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=8\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$

$$=\sqrt[3]{2}(8+5-\tfrac{1}{2})$$
$$=\sqrt[3]{2}\times\tfrac{25}{2}=\tfrac{25}{2}\sqrt[3]{2}$$

(iii) $\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{27\times3}=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$

$\sqrt[3]{-375}=\sqrt[3]{-125\times3}=\sqrt[3]{-125}\times\sqrt{3}=-5\sqrt[3]{3}$

$\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{64\times3}=\sqrt[3]{64}\times\sqrt[3]{3}=4\sqrt[3]{3}$

$\therefore\quad \sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{-375}-\sqrt[3]{192}=3\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}$

$$=\sqrt[3]{3}(3+5-4)\quad=4\sqrt[3]{3}$$

EXAMPLE 69

पूर्ण करणी के रूप में लिखो—

1. $3\sqrt{5}$
2. $2\sqrt[3]{3}$
3. $2\sqrt[4]{6}$
4. $4\sqrt[4]{5}$
5. $a\sqrt[n]{b}$
6. $x^3\sqrt[4]{y}$
7. $a^4\sqrt[5]{b^2}$
8. $2\sqrt[3]{16}$
9. $3\sqrt[5]{3}$
10. $x^3\sqrt[5]{y}$

सरल करो—

11. $\sqrt{50}$
12. $\sqrt[3]{40}$
13. $\sqrt[3]{-108}$
14. $\sqrt[6]{128}$
15. $\sqrt[3]{250}$
16. $\sqrt[4]{405}$
17. $\sqrt[3]{1372}$
18. $\sqrt[n]{x^{4n}a}$
19. $\sqrt[3]{-192a^3b^4}$
20. $\sqrt[3]{500a^7x^6}$

सरल करो—

21. $\sqrt{12}-\sqrt{147}+\sqrt{192}$
22. $3\sqrt{32}+\sqrt{98}+5\sqrt{50}$
23. $\sqrt{18}+\sqrt{32}$
24. $\sqrt{20}+\sqrt{180}$

25. $\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{54}$

26. $\sqrt[4]{80} + \sqrt[4]{405}$

27. $\sqrt[4]{768} - \sqrt[4]{243}$

28. $2\sqrt{405} - 3\sqrt[3]{125} + \sqrt{45}$

29. $4\sqrt[3]{192} - 4\sqrt[3]{375} + 2\sqrt[3]{24}$

30. $3\sqrt[3]{40} + 2\sqrt[3]{625} - 4\sqrt[3]{320}$

31. $5\sqrt[3]{-54} - 2\sqrt[3]{-16} + 4\sqrt[3]{686}$

32. $\sqrt{45x^3} + \sqrt{80x^3} + \sqrt{5xy^3}$

93. सममूलीय करणी (Surds of the Same Order)—किसी भी करणी की श्रेणी उसके मूल चिन्ह (*Root-symbol*) से व्यक्त की जाती है। जैसे, $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{12}$....आदि क्रमश: दूसरी, तीसरी तथा चौथी श्रेणी को करणियाँ हैं।

जिन करणियों के मूल चिन्ह एक ही हों उन्हें समान श्रेणी की करणियाँ (*Surds of the same order*) कहते हैं।

जैसे, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{3}$ सभी समान श्रेणी (दूसरी श्रेणी) की राशियाँ हैं। लेकिन $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ समान श्रेणी की करणियाँ नहीं हैं।

94. विभिन्न श्रेणी की करणियों को समान श्रेणी की करणियों में परिवर्तन करना—

नियम—मूल चिन्हों का लघुतम समापवर्त्य निकाल कर सरल करो।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. सममूलीय करणी के रूप में बदलो—

(i) $\sqrt{3}$ और $\sqrt[3]{2}$ (ii) $\sqrt[3]{4}$ और $\sqrt[3]{5}$

(iii) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{12}$

(i) यहाँ पर मूल चिन्ह, 2, 3 हैं,

$$\therefore \quad 2, 3 \text{ का ल० स०} = 6$$

अतः सबों का मूल 12 बनाने से सभी समान श्रेणी की करणियाँ बन जायेंगी।

इस प्रकार,

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}} = 3^{\frac{3}{6}} \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

और $$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$$

(ii) यहाँ पर मूल चिन्ह 3, 4 हैं।

$$3, 4 \text{ का ल० स०} = 12$$

इस प्रकार, $$\sqrt[3]{4} = (4)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{4}} = (4^4)^{\frac{1}{12}}$$

$$= (256)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{256}$$

और $$\sqrt[4]{5} = (5)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{12}}$$

$$= (125)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{125}$$

(iii) यहाँ पर मूल चिन्ह, 2, 3, 4 हैं,

$$\therefore \quad 2, 3, 4 \text{ का ल० स०} = 12$$

$$\therefore \quad \sqrt{5} = (5)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{6}} = (5^6)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{56}$$

$$\sqrt[3]{9} = (9)^{\frac{1}{3}} = 9^{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{4}} = (9^4)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{94}$$

$$\sqrt[4]{12} = (12)^{\frac{1}{4}} = 12^{\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}} = (12^3)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{12^3}$$

उदाहरण 2. कौन बड़ा है—

(i) $\sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$ (ii) $\sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[4]{9},$

(इसे हल करने के लिए करणियों को एक ही श्रेणी में बदलना होगा)

(i) यहाँ पर मूल चिन्ह, 3, 4 हैं,

$\therefore$ 3, 4 का ल० स० $=12$

$$\therefore \sqrt[3]{4}=(4)^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{4}}=(4^4)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{256}$$

$$\sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}}=(5^3)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{125}$$

चूंकि संख्याएं 256 और 125 में 256 बड़ी है; अतः $\sqrt[3]{4}$ सबसे बड़ी है।

(ii) यहाँ पर मूल चिन्ह, 2, 3, 4 हैं,

$\therefore$ 2, 3, 4, का ल० स० $=12.$

$$\therefore \sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{6}}=(5^6)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{15625}$$

$$\sqrt[3]{7}=(7)^{\frac{1}{3}}=7^{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{4}}=(7^4)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{2401}$$

$$\sqrt[4]{9}=(9)^{\frac{1}{4}}=9.^{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}}=(9^3)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{729}$$

संख्याएं, 15625, 2401, और 729 में 15625 सबसे बड़ी है,

$\therefore$ $\sqrt{5}$ सबसे बड़ी है।

95. करणियों का गुणा और भाग—सामान्य रूप से करणियों का गुणा या भाग तभी सरल किया जा सकता है जब करणियां समान श्रेणी की हों।

अतः करणियों का गुणा अथवा भाग के पहले देखना चाहिए कि वे समान श्रेणियों में हैं कि नहीं।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. गुणा करो—

(i) $\sqrt{8}$ और $\sqrt{50}$ (ii) $\sqrt{12}\times\sqrt{48}\times\sqrt{75}$

(i) $\sqrt{8} \times \sqrt{50} = (8)^{\frac{1}{2}} \times (50)^{\frac{1}{2}}$

$= (8 \times 50)^{\frac{1}{2}}$

$= (400)^{\frac{1}{2}} = (20^2)^{\frac{1}{2}} = 20$

(ii) $\sqrt{12} \times \sqrt{48} \times \sqrt{75} = (12)^{\frac{1}{2}} \times (48)^{\frac{1}{2}} \times (75)^{\frac{1}{2}}$

$= (12 \times 48 \times 75)^{\frac{1}{2}}$

$= (4 \times 3 \times 16 \times 3 \times 25 \times 3)^{\frac{1}{2}}$

$= (2^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2)^{\frac{1}{2}} (3^3)^{\frac{1}{2}}$

$= 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3\ (3)^{\frac{1}{2}}$

$= 120\sqrt{3}$

उदाहरण 2. भाग दो—

(i) $\sqrt{32}$ को $\sqrt{3}$ से (ii) $4\sqrt{21}$ को $6\sqrt{28}$ से

(i) $\sqrt{32} = (32)^{\frac{1}{2}} = (16 \cdot 2)^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{8} = (4 \cdot 2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \quad \sqrt{32} \div \sqrt{8} = \dfrac{4 \times 2^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = 2$

(ii) $4\sqrt{21} = 4 \times \sqrt{3 \times 7} = 4 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{1}{2}}$

$6\sqrt{28} = 6 \times \sqrt{4 \times 7} = 6 \times (2^2)^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{1}{2}}$

$= 12 \times 7^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \quad 4\sqrt{21} \div 6\sqrt{28} = \dfrac{4 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{1}{2}}}{12 \times 7^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{3} = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

96. सरल (Simple) और मिश्र करणी (Compound Surd) एक ही पद विशिष्ट करणी को सरल करणी (*Simple surd*) कहते हैं। जैसे, $3\sqrt{5}$ एक सरल करणी है।

दो या दो से अधिक करणियाँ जब एक दूसरी से '+' चिन्ह या '−' चिन्ह द्वारा जुड़ी रहती हैं, तो ऐसी राशि को मिश्र करणी (*Compound surd*) कहते हैं, जैसे—$3\sqrt{2}$ और $5\sqrt{3}$ इन दोनों करणियों से बने मिश्र करणी $3\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ है।

97. द्विपद करणी (Binomial Surd)—दो करणियों के जोड़ को या एक करणी और मूलक (*rational*) राशि के जोड़ को द्विपद करणी (*Binomial surds*) कहते हैं। जैसे, $2+\sqrt{3}$, $3+\sqrt{5}$ आदि।

दो या दो से अधिक मिश्र करणियों को गुणा करने की प्रणाली, दो या दो से अधिक बीजगणित की मिश्र राशियों की गुणन-प्रणाली के समान ही है।

उदाहरण—गुणा करो—(i) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ को $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ से।
(ii) $3\sqrt{5}-4\sqrt{2}$ को $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$ से।

(i) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \sqrt{a}.\sqrt{a}.-\sqrt{a}.\sqrt{b}+\sqrt{a}.\sqrt{b}-\sqrt{b}.\sqrt{b}$

$=a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}-b$

$=a-b$

(ii) $(3\sqrt{5}-4\sqrt{2})(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})=6\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}+9\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}-8\sqrt{2}\sqrt{5}\ /5-12\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

$=6.5.+9\sqrt{10}-8\sqrt{10}-12.2$

$=6+\ /\overline{10}$

EXAMPLE 70

समान श्रेणी को करणियों में परिवर्तित करो—

1. $\sqrt{3}$ और $\sqrt[3]{2}$
2. $\sqrt[3]{4}$ और $\sqrt[4]{3}$
3. $\sqrt[3]{5}$ और $\sqrt[5]{3}$
4. $\sqrt[5]{2}$ और $\sqrt[3]{3}$
5. $\sqrt{5}$ और $\sqrt[3]{9}$
6. $\sqrt[3]{2}, \sqrt{6}, \sqrt[5]{3}$

कौन सी बड़ी है—

7. $\sqrt{2}$ अथवा $\sqrt[3]{3}$
8. $\sqrt[3]{3}$ अथवा $\sqrt[4]{4}$
9. $\sqrt[3]{6}$ अथवा $\sqrt[4]{10}$
10. $\sqrt{7}$ अथवा $\sqrt[3]{13}$
11. $\sqrt{5}$ या $\sqrt[5]{3}$
12. $\sqrt{3}$ या $\sqrt[3]{5}$ या $\sqrt[4]{7}$

गुणनफल निकालो—

13. $a+\sqrt{b}$ को $\sqrt{ab}$ से
14. $3\sqrt{a}-5$ को $2\sqrt{a}$ से
15. $4\sqrt{x}+3\sqrt{y}$ को $4\sqrt{x}-3\sqrt{y}$ से
16. $2\sqrt{x-5}+4$ को $3\sqrt{x-5}-6$ से
17. $\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{7}$ को $\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{7}$ से
18. $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{48}$ को $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ से

वर्ग निकालो—

19. $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}$
20. $2\sqrt{8}+5\sqrt{6}$
21. $2\sqrt{5}+3\sqrt{7}$
22. $\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2}$
23. $2\sqrt{x^2+y^2}+5\sqrt{x^2-y^2}$
24. $2\sqrt{x}+3\sqrt{y}$
25. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

कौन बड़ा है—

26. $\sqrt{6}+\sqrt{11}$ या $\sqrt{3}+\sqrt{14}$
27. $\sqrt{6}+\sqrt{15}$ या $\sqrt{10}+\sqrt{11}$

98. अनुपूरक करणियाँ (Conjugate or Complementary surds)—यदि दो द्विपद करणियों में से दोनों पदों के बीच में केवल चिन्ह का अन्तर हो तो दोनों में से प्रत्येक एक दूसरे की अनुपूरक करणी कही जाती है। जैसे, $3+\sqrt{5}$ की अनुपूरक $3-\sqrt{5}$ है। $2-\sqrt{5}$ को अनुपूरक $2+\sqrt{5}$ है।

99. करणी निरसन- प्रक्रिया (Rationalisation)—अगर दो ऐसी करणियाँ हैं जिनका गुणनफल मूलक है, तो उन दोनों को एक दूसरी से गुणा करना ही करणी निरसन-प्रक्रिया कहलाता है। जैसे, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ को जब $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ से गुणा करते हैं, तो $a-b$ बचता है।

नियम—यदि कोई भिन्न दिया हुआ है जिसके हर में एक करणी राशि हो, तो उस भिन्न को सरल करने का तरीका यह है कि हरवाली करणी की अनुपूरक करणी से अंश और हर को गुणा कर दो।

उदाहरण 1. मूलक हरवाले बराबर भिन्न में बदलो—

(i) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1}$ (ii) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{3\sqrt{2}+1}{2\sqrt{5}+3}$

(i) $$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2-1}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{1}$$

$$=\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

(ii) $$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{2-3}$$

$$=\frac{4+4\sqrt{3}+3}{7}=-7-4\sqrt{3}$$

(iii) $\frac{3\sqrt{2}+1}{2\sqrt{5}+3}=\frac{3\sqrt{2}+1}{2\sqrt{5}+3}\times\frac{2\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}-3}$

$$=\frac{6\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+2\sqrt{5}-9\sqrt{2}-3}{2\cdot5-9}$$

$$=\sqrt{10}+2\sqrt{5}-9\sqrt{2}-3$$

100. द्विपद करणी के गुण (Properties of Binomial Surds)—

(i) यदि $a+\sqrt{b}=0$, तो $a=0$, $b=0$

दिया हुआ, $a+\sqrt{b}=0$

या, $a=-\sqrt{b}$

लेकिन a मूलक राशि है तथा $\sqrt{b}$ अमूलक राशि है, अतः वे आपस में बराबर नहीं हो सकती हैं।

$\therefore\ a=0$ और $b=0$

(ii) यदि $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ तो $a=c$, $b=d$

$\because\ a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$

$\therefore\ a-c=\sqrt{d}-\sqrt{b}$

लेकिन $a-c$ मूलक है और $\sqrt{d}-\sqrt{b}$ अमूलक है।

$\therefore\ a-c=0,\quad\therefore\ a=c$

और $\sqrt{d}-\sqrt{b}=0$

$\therefore\ \sqrt{d}=\sqrt{b}$

$\therefore\ d=b$

(iii) यदि $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{c}+\sqrt{d}$, तो $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{c}-\sqrt{d}$

$\because \quad \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{c}+\sqrt{d}$

$\therefore \quad a+\sqrt{b}=c+d+2\sqrt{cd}$

$\therefore \quad a=c+d$ और $\sqrt{b}=2\sqrt{cd}$

$\therefore \quad a-\sqrt{b}=c+d-2\sqrt{cd}$

$$=(\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$$

$\therefore \quad \sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{c}-\sqrt{d}.$

101. किसी भी द्विपद करणी का वर्गमूल निकालना—

$\because$ सूत्र से, $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy}$

= मूलक + अमूलक

$=a+\sqrt{b}$ मान लो

$\therefore \quad \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\therefore \quad a+\sqrt{b}$ के रूप के द्विपद करणी का वर्गमूल

$\sqrt{x}+\sqrt{y}$ के रूप का होगा

अतः मानलो $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\therefore \quad x+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$

$\therefore \quad a=x+y$

$\sqrt{b}=2\sqrt{xy}$

$\therefore \quad a^2-b=(x+y)^2-4xy=(x-y)^2$

$\therefore \quad \sqrt{a^2-b}=x-y$

अतः $\quad x+y=a$

$x-y=\sqrt{a^2-b}$

जोड़ने और घटाने पर,

$$2x = a + \sqrt{a^2 - b} \text{ तथा } 2y = a - \sqrt{a^2 - b}$$

$$\therefore \quad x = \frac{a + b\sqrt{a^2 - b}}{2} \text{ तथा } y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

$$\therefore \quad \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b})} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b})}$$

नोट—जब $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ हो, तो

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

उदाहरण 1. वर्गमूल निकालो—

(i) $\sqrt{27} + \sqrt{15}$

(ii) $7 + 2\sqrt{10}$

(i) $\sqrt{27} + \sqrt{15} = 3\sqrt{3} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$

$$= \sqrt{3}(3 + \sqrt{5})$$

$$\therefore \quad \sqrt{\sqrt{27} + \sqrt{15}} = \sqrt[4]{3}\sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

मान लो $\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$\therefore \quad 3 + \sqrt{5} = x + y + 2\sqrt{xy}$

$\therefore \quad x + y = 3....$ ....(i)

$2\sqrt{xy} = \sqrt{5}....$ ....(ii)

$\therefore \quad 4xy = 5....$ ....(iii)

$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 9 - 5 = 4$

$\therefore \quad x - y = 2....$ ....(iv)

(i) और (iv) को जोड़ने और घटाने पर,

$2x = 5, \quad \therefore \quad x = \frac{5}{2}$

$$2y=1, \quad \therefore \quad y=\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{27}+\sqrt{15}=\sqrt[4]{3}\left\{\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right\}$$

(ii) माना कि $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$$\therefore \quad 7+2\sqrt{10}=x+y+2\sqrt{xy}$$

$$\therefore \quad x+y=7.... \qquad ....(i)$$

और $2\sqrt{xy}=2\sqrt{10}$

$$\therefore \quad 4xy=40.... \qquad ....(ii)$$

$$\therefore \quad (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=49-40=9$$

$$\therefore \quad x-y=3.... \qquad ....(iii)$$

(i) और (iii) को जोड़ने और घटाने पर,

$$2x=10; \quad \therefore \quad x=5$$

और $2y=4; \quad \therefore \quad y=2$

$$\therefore \quad \sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

उदाहरण 2. यदि $=x\frac{\sqrt{3}}{2}$ हो, तो $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}$

$+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ का मान निकालो।

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad 1+x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$$

और $1-x=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक,

$$=\frac{\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+1}+\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{9-3}$$

$$=\frac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3+6+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3}{6}$$

$$=\frac{6}{6}=1$$

उदाहरण 3. यदि $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, तो $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ का मान बताओ।

$\because \quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad 1+x=\frac{2+\sqrt{3}}{2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$

और $\quad 1-x=\frac{2-\sqrt{3}}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$

∴ दिया हुआ व्यंजक,

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

उदाहरण 4. जब $x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ और $y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ हो, तो

$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ का मान बताओ। (H. S. 62S)

∵ $x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

∴ $x^2=\frac{3+1+2\sqrt{3}}{3+1-2\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

उसी प्रकार, $y^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

और $xy=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=1$

∴ दिया हुआ व्यंजक,

$$=\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+1}{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-1}$$

$$=\frac{\dfrac{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2}{4-3}+1}{\dfrac{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2}{4-3}+1}$$

$$=\frac{2(4+3)+1}{2(4+3)-1}=\frac{15}{13}$$

उदाहरण 5. यदि $x=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ और $e=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, तो

$\dfrac{x-y}{x+y}$ का मान बताओ। **(65A)**

प्रश्न से, $x+y=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b}$$

$$=\frac{2(a+b)}{a-b}$$

और $x-y=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b}=\frac{4\sqrt{ab}}{a-b}$$

$$\therefore\quad \frac{x-y}{x+y}=\frac{\dfrac{4\sqrt{ab}}{a-b}}{\dfrac{2(a+b)}{a-b}}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$$

उदाहरण 6. यदि $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$, तो

$\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ का मान बताओ। (H.S. 65A)

$$\because \quad x=\frac{2ab}{b^2+1}$$

$$\therefore \quad a+x=a+\frac{2ab}{b^2+1}$$

$$=\frac{ab^2+a+2ab}{b^2+1}=\frac{a(1+2b+b^2)}{b^2+1}$$

$$=\frac{a(1+b)^2}{b^2+1}=\frac{a(b+1)^2}{b^3+1}$$

$$a-x=a-\frac{2ab}{b^2+1}=\frac{a(b^2-2b+1)}{b^2+1}=\frac{a(b-1)^2}{b^2+1}$$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक,

$$=\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{a}(b+1)}{\sqrt{b^2+1}}+\dfrac{\sqrt{a}(b-1)}{\sqrt{b^2+1}}}{\dfrac{\sqrt{a}(b+1)}{\sqrt{b^2+1}}-\dfrac{\sqrt{a}(b-1)}{\sqrt{b^2+1}}}$$

$$=\frac{\sqrt{a}(b+1+b-1)}{\sqrt{a}(b+1-b+1)}=\frac{2b}{2}=b$$

उदाहरण 7. यदि $x = 2 + \sqrt{3}$, तो $x^3 + x^{-3}$ का मान बताओ। (H.S. 60S)

$\because \quad x = 2 + \sqrt{3}; \qquad \therefore \quad x^{-1} = 2 - \sqrt{3}$

और $x^3 + x^{-3} = (x + x^{-1})^3 - 3(x + x^{-1})$

$$= (2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3})^3 - 3(2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3})$$

$$= 4^3 - 3 \times 4$$

$$= 64 - 12 = 52$$

उदाहरण 8. सरल करो—

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{63 - \sqrt{28}}} - \dfrac{1}{\sqrt{63 + \sqrt{28}}}$ (61S)

(ii) $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + 2\sqrt{6}$ (60S)

(iii) $\dfrac{3 + \sqrt{6}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} - \sqrt{32} + \sqrt{50}}$ (60A)

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{63} - \sqrt{28}} = \dfrac{\sqrt{63} + \sqrt{28}}{63 - 28} \quad \dfrac{\sqrt{63} + \sqrt{28}}{35}$

और $\dfrac{1}{\sqrt{63} + \sqrt{28}} = \dfrac{\sqrt{63} - \sqrt{28}}{63 - 28} = \dfrac{\sqrt{63} - \sqrt{28}}{35}$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक,

$$= \frac{\sqrt{63} + \sqrt{28}}{35} - \frac{\sqrt{63} - \sqrt{28}}{35}$$

$$= \frac{\sqrt{63} + \sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{28}}{35} = \frac{2\sqrt{28}}{35} = \frac{4\sqrt{7}}{35}$$

(ii) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3+2-2\sqrt{6}}{3-1}$

$$=\frac{5-2\sqrt{6}}{2}.$$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक,

$$=\frac{5-2\sqrt{6}}{2}+2\sqrt{6}$$

$$=\frac{5-2\sqrt{6}+4\sqrt{6}}{2}$$

$$=\frac{5+2\sqrt{6}}{2}$$

(iii) हर $=5\sqrt{3}-2\times2\sqrt{3}-4\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

$=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}-4\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक,

$$=\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{12}}{3-2}$$

$$=3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

उदाहरण 9. यदि $\sqrt{2}=1{\cdot}41421$; $\sqrt{3}=1{\cdot}73205$; $\sqrt{5}=2{\cdot}23607$, तो निम्नलिखित का तीन दशमलव अंक तक मान बताओ।

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (54A); (ii) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ (61A)

(iii) $\dfrac{5+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ (56S); (iv) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ (55A)

(i) $$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3}=\frac{2{\cdot}23607+1{\cdot}73205}{2}$$

$$=\frac{3{\cdot}96812}{2}=1{\cdot}98406=1{\cdot}984$$

(ii) $$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}=\frac{3(2{\cdot}23607+1{\cdot}41421)}{3}$$

$$=3{\cdot}65028=3{\cdot}650$$

(iii) $$\frac{(5+\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}=\frac{(5+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{4-2}$$

$$=\frac{10\times 5\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2}{2}$$

$$=\frac{12+7\sqrt{2}}{2}=\frac{12+7\times 1.41421}{2}$$

$$=\frac{12+9{\cdot}89947}{2}=\frac{21{\cdot}8994}{2}$$

$$=10{\cdot}944$$

(iv) $$\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\times\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{9+5+6\sqrt{5}}{9-5}$$

$$=\frac{14+6\sqrt{5}}{4}=\frac{14+6\times 2{\cdot}23607}{4}$$

$$=\frac{14+13.40442}{4}=\frac{27{\cdot}40442}{4}=6{\cdot}851$$

EXAMPLE 71

मूलक हर वाले बराबर भिन्न में बदलो—

1. $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ 2. $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{3}}$ 3. $\frac{5-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$

4. $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$ 5. $\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4\sqrt{3}+2\sqrt{7}}$

6. $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ 7. $\frac{4+3\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$

8. $\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 9. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$

10. $\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$ 11. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

सरल करो—

12. $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

13. $\frac{4}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ 14. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\sqrt{15}$

15. $\frac{2+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}+\frac{4-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

16. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

17. $\dfrac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}+\dfrac{1}{a-\sqrt{a^2-1}}$

18. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

19. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

20. $\dfrac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$

21. $\dfrac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}$

22. $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-1)(3\sqrt{3}-5)(2+\sqrt{2})}$

23. $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

24. $(3+2\sqrt{2})^{-3}+(3-2\sqrt{2})^{-3}$

वर्गमूल निकालो—

25. (i) $7+2\sqrt{10}$ (ii) $16-5\sqrt{7}$

(iii) $13-8\sqrt{3}$ (iv) $4-2\sqrt{3}$

(v) $7+4\sqrt{3}$ (vi) $11-6\sqrt{2}$

(vii) $8+2\sqrt{15}$ (viii) $14-6\sqrt{5}$

(ix) $28+10\sqrt{3}$ (x) $47+4\sqrt{33}$

(xi) $4-\sqrt{7}$ (xii) $6-\sqrt{35}$

(xiii) $\sqrt{18}-\sqrt{16}$ (xiv) $\sqrt{32}-\sqrt{24}$

(xv) $\sqrt{27}+\sqrt{24}$

26. दिया हुआ है $\sqrt{2}=1{\cdot}41421$, $\sqrt{3}=1{\cdot}73205$, $\sqrt{5}=2{\cdot}23607$, तो निम्नलिखित का तीन दशमलव अंक तक मान निकालो ।

(i) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

(iii) $\dfrac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ (iv) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

(v) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ (vi) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4+\sqrt{15}}$

(vii) $\dfrac{2\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}-3}$ (viii) $\dfrac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$

(ix) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$ (x) $\dfrac{\sqrt{5}-2}{-4\sqrt{5}}$

27. सरल करो— $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

28. यदि $\sqrt{y-z}+\sqrt{z-x}+\sqrt{x-y}=0$, तो साबित करो कि $x=y=z$

29. (i) यदि $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$, तो साबित करो कि

$$(x+y+z)^3=27xyz$$

(ii) यदि $\sqrt[3]{(a+b)}+\sqrt[3]{(b+c)}+\sqrt[3]{c+a}=0$, तो साबित करो कि $(a+b+c)^3=9(a^3+b^3+c^3)$

30. मान निकालो—

(i) $x^3 - 2x^2 - 7x + z$ जब $x = 2 + \sqrt{3}$

Hints $\because \quad x = 2 + \sqrt{3}$

$\therefore \quad x - 2 = \sqrt{3}$

$(x-2)^2 = 3$

या, $x^2 - 4x + 4 = 3$

या, $x^2 - 4x + 1 = 0$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक,

$= x(x^2 - 4x + 1) + 2(x^2 - 4x + 1)$

$= x \times 0 + 2 \times 0$

$= 0$

(ii) $x^3 - 4x^2 - 5x + 21$, जब $x = 3 + \sqrt{2}$

(iii) $x^4 - x^3 - x^2 - 5x + 2$, जब $x = \sqrt{2} + 1$

(iv) $x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 26x + 2$, जब $x = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

Hints $\because \quad x = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

$\therefore \quad x - 1 = \sqrt{3} + \sqrt{5}$

$\therefore \quad x^2 - 2x + 1 = 3 + 5 + 2\sqrt{15}$

या, $x^2 - 2x - 7 = 2\sqrt{15}$

या, $x^4 + 4x^2 + 49 - 4x^3 - 14x^2 + 28x = 4 \cdot 15 = 60$

या, $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x = 11$

$\therefore \quad x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 26x = x^2 - 2x + 11$

$\therefore \quad x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 26x + 2 = x^2 - 2x + 13$

$$=x^2-2x+1+12$$

$$=12+8+2\sqrt{15}$$

$$=20+2\sqrt{15}$$

(v) $2x^4-8x^3-5x^2+26x-28$, जब $x=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

31. जब $x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ और $y=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, तो $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ का मान निकालो।

32. जब $x=\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a+1}}$ और $y=\frac{\sqrt{a+1}\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}\sqrt{a+1}}$,

तो $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ का मान बताओ।

—:: o ::—

चौबीस

वर्गमूल

(Square Root)

102. परिभाषा—

मान लिया कि दो राशियाँ x और y है। वे दोनों आपस में अगर $x=\sqrt{y}$ से संबन्धित हैं, तो x को y का वर्गमूल कहते हैं।

$$\because \quad x=\sqrt{y}$$

$$\therefore \quad x^2=y,$$

अतएव किसी राशि का वर्गमूल वह राशि है जिसको यदि उसी राशि से गुणा करें तो गुणनफल दी हुई राशि के बराबर होता हो।

नोट—यहाँ पर ध्यान देने की बात है कि x^2 का वर्गमूल $+x$ या $-x$ दोनों होगा क्योंकि चाहे $(+x)$ को वर्ग करें या $(-x)$ को वर्ग करें, उत्तर x^2 ही मिलेगा। अत: x^2 का वर्गमूल $=\pm x$। इसी प्रकार x^4 का वर्गमूल $=\pm x^2$, लेकिन यहाँ पर हम वर्गमूल में सिर्फ + चिन्ह का ही व्यवहार करेंगे।

103. वर्गमूल निकालने का तरीका—

तरीका I. निरीक्षण द्वारा (By Inspection)—यदि कोई व्यंजक $(a+b)^2$ या, $(a-b)^2$ के रूप में हो जाय तो व्यंजक का वर्गमूल $(a+b)$ या, $(a-b)$ होगा।

उदाहरण 1. (i) x^{64} (59A)

(ii) $\dfrac{x^{16}}{a^{16}}+\dfrac{a^{16}}{x^{16}}+2$ (60A)

(iii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{9}{4}$ (59A)

(iv) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$

(37A, 40A, 47S, 50A, 63S)

(v) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12$

(56S, 68S)

(vi) $x^2+\frac{a^2}{9}-bx+\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{3}+2ax$

(58A)

(i) दिया हुआ व्यंजक,

$=x^{64}=(x^{32})^2$

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $=x^{32}$

(ii) दिया हुआ व्यंजक,

$=\left(\frac{x^8}{a^8}\right)^2+2\left(\frac{x^8}{a^8}\right)\left(\frac{a^8}{x^8}\right)+\left(\frac{a^8}{x^8}\right)^2=\left(\frac{x^8}{a^8}+\frac{a^8}{x^8}\right)^2$

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $=\frac{x^8}{x^8}+\frac{a^8}{x^8}$

(iii) दिया हुआ व्यंजक,

$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2.\left(x-\frac{1}{x}\right).\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$=\left(x-\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\right)^2$

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $=x-\frac{1}{x}-\frac{3}{2}$

(iv) दिया हुआ व्यंजक,

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4x.\frac{1}{x} - 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right) - 2\cdot\left(x - \frac{1}{x}\right)\cdot 2 + (2)^2$$

$$= \left(x - \frac{1}{x} - 2\right)^2$$

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $= x - \frac{1}{x} - 2 = x - 2 - \frac{1}{x}$

(v) दिया हुआ व्यंजक,

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 12$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4.\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) + 12$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 8 + 12$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\cdot 2 + 2^2$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right)^2$$

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $= x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$

(vi) दिया हुआ व्यंजक,

$$= x^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{b}{2}\right)$$

$$+ 2\left(\frac{a}{3}\right)x$$

$$=x^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+2\left(\frac{a}{3}\right).x-2\left(\frac{b}{2}\right).x$$

$$-2\left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{b}{2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\right)^2$$

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $=x+\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{2}$

उदाहरण 2. वर्गमूल निकालो—

(i) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+16$

(ii) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16$

(i) दिया हुआ व्यंजक,

$=\{(x+1)(x+7)\}\times\{(x+3)(x+5)\}+16$

$=\{x^2+8x+7\}\times\{x^2+8x+15\}+16$

$=(y+7)(y+15)+16$ [मान लो $y=x^2+8^2$

$=y^2+22y+105+16$

$=y^2+2\cdot y\cdot 11+121$

$=(y+11)^2$

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $=x+11=x^2+8x+11$

(ii) दिया हुआ व्यंजक,

$=\{x-1)(x-7)\}\times\{(x-3)(x-5)\}+16$

$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+16$

$=(y+7)(y+15)+16$ [मान लो $y=x^3-8x$

$=y^2+22y+105+16$

$=y^2+2\cdot y\cdot 11+121$

$$= (y+11)^2$$

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $= y + 11 = x^2 - 8x + 11$

उदाहरण 3. a की कीमत क्या हो कि निम्नलिखित व्यंजक $x^4 + \frac{1}{x^4} + 6\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + a$ एक पूर्ण वर्ग हो जायेंगे।

दिया हुआ व्यंजक,

$$= \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 2 + 6\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + a$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2\cdot\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\cdot 3 + 9 - 9 + 2 + a$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{x^2} + 3\right)^2 + a - 7$$

यदि दिया हुआ व्यंजक एक पूर्ण वर्ग हो, तो $a - 7$ अवश्य ही शून्य के बराबर होगा। $\therefore$ $a = 7$.

उदाहरण 4. a की कीमत क्या हो कि निम्नलिखित व्यंजक $x^2 + \frac{1}{x^2} + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + a$ एक पूर्ण वर्ग हो जाय। (65A)

दिया हुआ व्यंजक,

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x\frac{1}{x} + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + a$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\cdot 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 - 4 - 2 + a$$

$$= \left(x + \frac{1}{x} + \right)^2 + a - 6$$

यदि दिया हुआ व्यंजक एकपूर्ण वर्ग हो, तो $a-6$ अवश्य ही शून्य के बराबर होगा। $\therefore\ a=6$.

उदाहरण 5. वर्गमूल निकालो—

(i) $(2x^2+x-1)(3x^2+5x+2)(6x^2+x-2)$

(ii) $(x^2-y^2)(2x^2-3y^2+xy)(2x^2+3y^2+5xy)$

(i) $2x^2+x-1=2x^2+2x-x-1$

$=2x(x+1)-1(x+1)$

$=(x+1)(2x-1)$

$3x^2+5x+2=3x^2+3x+2x+2$

$=3x(x+1)+2(x+1)$

$=(x+1)(3x+2)$

$6z^2+x-2=6x^2+4x-3x-2$

$=2x(3x+2)-1(3x+2)$

$=(3x+2)(2x-1)$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=(x+1)^2\ (2x-1)^2\ (3x+2)^2$

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $=(x+1)(2x-1)(3x+2)$

(ii) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$2x^2+xy-3y^2=2x^2+3xy-2xy-3y^2$

$=x(2x+3y)-y(2x+3y)$

$=(x-y)(2x+3y)$

$2x^2+5xy+3y^2=2x^2+3xy+2xy+3y^2$

$=x(2x+3y)+y(2x+3y)$

$=(x+y)(2x+3y)$

∴ दिया हुआ व्यंजक $= (x-y)^2(x+y)^2(2x+3y)^2$

∴ इष्ट वर्गमूल $= (x-y)(x+y)(2x+3y)$

उदाहरण 6. वर्गमूल निकालो—

$$\frac{x^4}{4} + 4x^2 + \frac{ax^2}{3} + \frac{a^2}{9} - 2x^3 - \frac{4ax}{3} \quad \text{(S.S. 58S)}$$

दिया हुआ व्यंजक,

$$= \frac{x^4}{4} + 4x^2 + \frac{a^2}{9} - 2x^3 + \frac{ax^2}{3} - \frac{4ax}{3}$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + (-2x)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$(-2x) + 2\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{a}{3}\right) + 2(-2x)\left(\frac{a}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{a}{3}\right)^2$$

∴ इष्ट वर्गमूल $= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{a}{3}$

उदाहरण 7. वर्गमूल निकालो—

$$x^4 + 1 - x(x^2+1) + 2\frac{1}{4}x^2 \quad \text{(H.S. 68 A)}$$

दिया हुआ व्यंजक,

$$= (x^2+1)^2 - 2x^2 - x(x^2+1) + \frac{9}{4}x^2$$

$$= (x^2+1)^2 - 2\cdot\frac{x}{2}(x^2+1) + \frac{9}{4}x^2 - 2x^2$$

$$= (x^2+1)^2 - 2\cdot\frac{x}{2}(x^2+1) + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$=\left(x^2+1-\frac{x}{2}\right)^2$$

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $=x^2-\dfrac{x}{2}+1$

EXAMPLE 72

वर्गमूल निकालो—

1. (i) a^6 (ii) a^{16} (iii) a^2b^4

(iv) $16x^4y^6z^8$ (iv) $\dfrac{25}{49}\dfrac{x^2y^4}{z^2}$

2. $x+y+2\sqrt{xy}$ 3. $a^2+4ab+4b^2$

4. $25x^2y^2-40xy+16$ 5. $49a^2x^4-42ab^2x^2+9b^4$

6. $49a^6b^8+126a^7b^7+81a^8b^6$

7. $\dfrac{1}{4}x^9y^4-\dfrac{1}{5}x^5y^5+\dfrac{1}{25}x^4y^9$

8. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

9. $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$

10. $4a^2+b^2+9c^2+6bc-12ac-4ab$

11. $a^4+4b^4+9c^4+4a^2b^2-6a^2c^2-12b^2c^2$

12. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ (37A, 40A, 37S, 50A, 63S)

13. $\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)+2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3$ (57A)

14. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{2a}{x}+\dfrac{2x}{a}+3$

15. $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-\sqrt{2}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+2\dfrac{1}{2}$

16. $\frac{9x^2}{a^2}+\frac{a^2}{9x^2}-6\frac{x}{a}-\frac{2a}{3a}+3$

17. $x^2+\frac{1}{x^2}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+6$

$2\sqrt{2} \qquad -2\sqrt{2}$

18. $-2+a \qquad +a$

19. $a^4+b^4+2^2ab^2$

20. $(ab+bc+ac)^2-4abc(b+c)$ (26A)

21. $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

22. $x(x-1)(x-2)(x-3)+1$

23. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

24. $(x+1)(x+2)(x+5)(x+6)+4$

25. $(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)+16$

26. $(2x+1)(2x+3)(2x+5)(2x+7)+16$

27. $\left(x-\frac{1}{2x}\right)^2-14\left(x+\frac{1}{2x}\right)+57$

28. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-1+\frac{2x}{y}-\frac{2y}{x}$ (50S)

29. a की कीमत कितनी हो कि
$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+a$ एक पूर्ण वर्ग हो जाय।

30. $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+16$ (56S, 61S)

31. $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+16$

32. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+4(x+4)^2$

33. $(x^2+3x+2)(2x^2+5x+3)(2x^2+7x+6)$

34. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16$

35. $a^4 + 2a^3 - a + \frac{1}{4}$; 36. $25x^{-2} - 12x + 16x^{-3} - 4x^4 - 24x^{-5}$

37. यदि $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+c$ पूर्ण वर्ग हो, तो c का मूल्य निकालो।

तरीका II—जिस तरीके से अंकगणित में वर्गमूल निकाला जाता है उस तरीके से भी बीजगणित में वर्गमूल निकाला जाता है जैसा कि उदाहरणों से सूचित होगा। लेकिन कुछ नियमों पर ध्यान देना चाहिए।

नियम—

(i) सर्व प्रथम व्यंजक को प्रश्न में दिये गए अक्षर (*letter*) के अनुसार सजाकर रखें।

(ii) इसके बाद व्यंजक के प्रथम पद के अंक का वर्गमूल निकालें और अक्षर के घात के वर्गमूल (जो अक्षर के घात का आधा लेने से प्राप्त होता है) से गुणा करें। वर्गमूल का प्रथम पद ज्ञात हो जाता है जिसे व्यंजक के दायें बायें खड़ी लकीर के बगल में लिखते हैं और शेष क्रिया अंकगणित की तरह करते हैं।

(iii) वर्गमूल का दूसरा, तीसरा···इत्यादि पद ज्ञात करने के लिए व्यंजक के अवशेष प्रथम पदों से बायें तरफ के प्रथम पद से ही हमेशा भाग देते हैं, जिसे अंकगणित की तरह पद को चिन्ह सहित बायें दायें जोड़ते चले जाते हैं जबतक क्रिया खत्म नहीं हो जाती है। साधित प्रश्नों से नियम समझ में आ जायेगा।

मान लो कि x में कोई दिया हुआ व्यंजक है। वर्गमूल निकालने के लिए सबसे पहले व्यंजक को x के घटते हुए क्रम में सजा लेना चाहिए।

उदाहरण 1. $5x^{-2} - 4x^{-1} + 4 - 2x^{-3} + x^{-4}$ का वर्गमूल निकालो।

x के घटते हुए क्रम में सजाकर रखने पर (H.S. 62A)

2	$4 - 4x^{-1} + 5x^{-2} - 2x^{-3} + x^{-4}$	$2 - x^{-1} + x^{-2}$
2	$-\ 4$	
$4 - x^{-1}$	$-4x^{-1} + 5x^{-2}$	
$-x^{-1}$	$-4x^{-1} + x^{-2}$	
	$+ \quad -$	
$4 - 2x^{-1} + x^{-2}$	$4x^{-2} - 2x^{-3} + x^{-4}$	
$+x^{-2}$	$4x^{-2} - 2x^{-3} + x^{-4}$	
	$- \quad + \quad -$	

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $= 2 - x^{-1} + x^{-2}$

उदाहरण 2. $a^2x^{-2} + 2ax^{-1} + a^{-2}x^2 + 3 + 2a^{-1}x$ **(54A)**

सजाने पर, ax^{-1}	$a^2x^{-2} + 2ax^{-1} + 3 + 2a^{-1}x + a^{-2}x^2$	$ax^{-1} + 1 + a^{-1}x$
ax^{-1}	x^2x^{-2}	
	$-$	
$2ax^{-1} + 1$	$+2ax^{-1} + 3 + 2a^{-1}x + a^{-2}x^2$	
$+1$	$+2ax^{-1} + 1$	
	$- \quad -$	
$2ax^{-1} + 2 + a^{-1}x$	$2 + 2a^{-1}x + a^{-2}x^2$	
$+a^{-1}x$	$2 + 2a^{-1}x + a^{-2}x^2$	
	$- \quad - \quad -$	

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $= ax^{-1} + 1 + a^{-1}x$

उदाहरण 3. a का मान बताइये जिससे $4x + 8x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-1} + x^{-2} + a$ पूरा वर्ग हो जाय। **(55S)**

$2x^{\frac{1}{2}}$	$4x + 8x^{\frac{1}{2}} + a + 4x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-1} + x^{-2}$	$2x^{\frac{1}{2}} + 2 + x^{-1}$
$2x^{\frac{1}{2}}$	$4x$	
	$-$	
$4x^{\frac{1}{2}} + 2$	$8x^{\frac{1}{2}} + a + 4x^{-2} + 4x^{-1} + x^{-2}$	
2	$8x^{\frac{1}{2}} + 4$	
	$- \quad -$	
$4x^{\frac{1}{2}} + 4 + x^{-1}$	$(a - 4) + x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-1} + x^{-2}$	
	$+4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-1} + x^{-2}$	
	$- \quad - \quad -$	
	$(a - 4)$	

यदि उपर्युक्त व्यंजक पूर्ण वर्ग है, तो शेष $=0$ होगा

$$\therefore \quad a-4=0$$
$$\therefore \quad a=4$$

उदाहरण 4. $x^6+\dfrac{1}{x^6}+6\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)+15\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+20$ का वर्गमूल निकालो। (H. S. 60S)

x को घटते हुए घातों में सजाने पर,

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^3 & x^6+6x^4+15x^2+20+\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{15}{x^2}+\dfrac{1}{x^6} & x^3+3x \\
x^3 & x^6 & +\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3} \\
 & - & \\
\hline
2x^3+3x & 6x^4+15x^2 & \\
+3x & 6x^4+9x^2 & \\
 & -\quad - & \\
\hline
2x^3+6x+\dfrac{1}{x} & 6x^2+20+\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{15}{x^2}+\dfrac{1}{x^6} & \\
\dfrac{3}{x} & 6x^2+18+\dfrac{9}{x^2} & \\
 & -\quad -\quad - & \\
\hline
2x^3+6x+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^3} & 2+\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{1}{x^6} & \\
\dfrac{1}{x^3} & 2+\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{1}{x^6} & \\
 & -\quad -\quad -\quad - & \\
\hline
 & \times &
\end{array}
$$

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $=x^3+3x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}$

उदाहरण 5. $4x^4+20x^2-3+\dfrac{49}{x^4}-\dfrac{70}{x^2}$ का वर्गमूल निकालो। (H.S. 61A)

$$
\begin{array}{r|l|l}
2x^2 & 4x^4 + 20x^2 - 3 + \frac{49}{x^4} - \frac{70}{x^2} & 2x^2 + 5 - \frac{7}{x^2} \\
2x^2 & 4x^4 & \\
 & - & \\
\hline
4x^2 + 5 & 20x^2 - 3 + \frac{70}{x^2} - \frac{49}{x^4} & \\
5 & 20x^2 + 25 & \\
 & - \quad - & \\
\hline
4x^2 + 10 - \frac{7}{x^2} & -28 + \frac{70}{x^2} - \frac{49}{x^4} & \\
-\frac{7}{x^2} & -28 + \frac{70}{x^2} - \frac{49}{x^4} & \\
 & + \quad - \quad + & \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $= 2x^2 + 5 - \frac{7}{x^2}$

उदाहरण 6. a की क्या कीमत रखने से $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + a$ एक पूर्ण वर्ग हो जायेगा। **(H.S. 61S)**

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2 & x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + a & x^2 - 2x + 3 \\
x^2 & x^4 & \\
 & - & \\
\hline
2x^2 - 2x & -4x^3 + 10x^2 - 12x + a & \\
-2x & -4x^3 + 4x^2 & \\
 & + \quad - & \\
\hline
2x^2 - 4x + 3 & 6x^2 - 12x + a & \\
+3 & 6x^2 - 12x + 9 & \\
 & - \quad + \quad - & \\
\hline
 & a - 9 & \\
\end{array}
$$

$\therefore$ उपर्युक्त व्यंजकों को पूर्ण वर्ग होने के लिए $a - 9 = 0$

$\therefore \quad a = 9$

उदाहरण 7. वर्गमूल निकालो—

$$x^4 + \frac{1}{16} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 2x^3$$ **(S.S. 67A)**

x को घटते हुए घातों (*Power*) में सजाने पर,

$$x^2 \quad \Big| \quad x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \quad \Big| \quad x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$x^2 \quad \Big| \quad x^4$$

$$-$$

$$2x^2 - x \quad \Big| \quad -2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$$

$$-x \quad \Big| \quad -2x^3 + x^2$$

$$+ \quad -$$

$$2x^2 - 2x + \frac{1}{4} \quad \Big| \quad \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$$

$$- \quad + \quad -$$

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $= x^2 - x + \dfrac{1}{4}$

उदाहरण 8. वर्गमूल निकालो—

$$x^{\frac{5}{3}} - 4x^{\frac{4}{3}} + 4x + 2x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} \qquad \text{(S.S. 68A)}$$

$$x^{\frac{5}{6}} \quad \Big| \quad x^{\frac{5}{3}} - 4x^{\frac{4}{3}} + 4x + 2x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \quad \Big| \quad x^{\frac{5}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{6}}$$

$$x^{\frac{5}{6}} \quad \Big| \quad x^{\frac{5}{3}}$$

$$-$$

$$2x^{\frac{5}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}} \quad \Big| \quad -4x^{\frac{4}{3}} + 4x + 2x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}$$

$$2x^{\frac{1}{2}} \quad \Big| \quad -4x^{\frac{4}{3}} + 4x$$

$$+ \quad -$$

$$2x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{6}} \quad \Big| \quad +2x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$$

$$x^{-\frac{1}{6}} \quad \Big| \quad 2x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$$

$$- \quad + \quad -$$

$\therefore$ इष्ट वर्गमूल $= x^{\frac{5}{6}}\ 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{6}}$

EXAMPLE 54

निम्नलिखित व्यंजकों का वर्गमूल निकालो—

1. $4x^2z^2 + 12xyz + 9y^2$
2. $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x - 9$
3. $x^6 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1$
4. $4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 24x + 16$
5. $4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16ab^2x + 16b^4$
6. $9x^4 - 2x^3y + \frac{163}{9}x^2y^2 - 2xy^3 + 9y^4$
7. $x^4 - 2x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$
8. $x^4 + \frac{4}{x^2} - 2 - 4x - x^3 + \frac{x^2}{4}$
9. $\frac{a^2}{x^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{a^4}{4} + \frac{a^3}{x} - 2 - ax$
10. $\frac{a^2}{4b^2} - \frac{a}{b} + \frac{4b^2}{a^2} - 1 + \frac{4b}{a}$
11. $\frac{9a^2}{x^2} - \frac{6a}{5x} + \frac{101}{25} - \frac{4x}{15a} + \frac{4x^2}{9a^2}$
12. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\frac{3}{4}$
13. $x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + 3x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1$
14. $x^{\frac{5}{3}} - 4x^{\frac{4}{3}} + 2x + 4x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}$
15. $a^2x^{-2} + 2ax^{-1} + a^{-2}x^2 + 3 + 2a^{-1}x$
16. $x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$ (59S)

17. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

18. $x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 12x + 9$

19. $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

20. $x^4 - 6x^3 + \frac{29}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{9}$

21. $\frac{a^4}{9} - \frac{2}{3}a^3 + \frac{4}{3}a^2 - a + \frac{1}{4}$ (H.S. 63S)

22. $\frac{x^4}{4} + 4x^2 + \frac{ax^2}{3} + \frac{a^2}{9} - 2x^3 - 4ax$ (58S)

23. $9x^2 - 24x + 19 - \frac{4}{x} + \frac{9}{4x^2}$ (42S)

24. $\frac{9x^2}{a^2} + \frac{a^2}{9x^2} - \frac{6x}{a} - \frac{2a}{3x} + 3$ (47A, 57A, 62A)

25. $a^2x^{-2} + 2ax^{-1} + a^{-2}x^2 + 3 + 2a^{-1}x$ (54A)

26. $x^4 - 2x^2 + 3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}$ (40S)

27. $x^4 + \frac{1}{x^4} - 6x^2 + \frac{6}{x^2} + 7$ (55A, 60S)

28. $4x^4 + 20x^2 - 3 + \frac{49}{x^4} - \frac{70}{x^3}$ (H.S. 61A)

29. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 6\frac{y}{x} - 6\frac{x}{y} + 7$ (39S, 57S)

30. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{7}{4}$ (43A, 64S, 65S)

31. $x^{\frac{5}{3}} - 4x^{\frac{5}{6}} + 4x + 2x^{\frac{7}{6}} - 4x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$ (46A)

32. $x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{5}{6}} + 4x + 2x^{\frac{7}{6}} - 4x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{3}}$ (54S)

33. $6x^{\frac{4}{3}} + 9x^2 - 4 - 11x^{\frac{2}{3}} + 4x^{-\frac{2}{3}}$ (29A)

34. a की क्या कीमत हो कि निम्नलिखित व्यंजक एक पूर्ण वर्ग हो जायें—

(i) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + a$

(ii) $x^4-4x^3+10x^2-12x+a$ (H.S. 61S)

(iii) $16x^4-24x^3+ax^2-24x+16$ (26A)

(iv) $4x^4+12x^3+25x^2+ax+16$ (32A, 56A, 61A)

(v) $4x+8x^{\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}}-4x^{-1}+x^{-2}+a$

(34A, 49A, 55S, 66A, H.S. 63A, 64S)

वर्गमूल निकालो—

35. $5x^{-2}-4x^{-1}+4-2x^{-3}+x^{-4}$ (H.S. 62A)

36. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{4x^2}-\frac{x}{y}+\frac{y}{2x}-\frac{3}{4}$ (36A, 41S; H.S. 62S)

37. a की क्या कोमत हो कि निम्नलिखित व्यंजक एक पूर्ण वर्ग हो जायें—

(i) $x^4+ax^3+6x^2+4x+1$ (49S

(ii) $x^4+4x^3+ax^2+4x+1$ (H.S. 64A)

(iii) $4x^4+4x^3-3x^2-ax+1$ (44A)

(iv) $4x^4-12x^3+25x^2-24x+a$ (48A, 64A)

(v) $\frac{4}{9}x^2-\frac{8x}{y}+\frac{4}{3}x+\frac{36}{y^2}-\frac{a}{y}+1$ (33A)

38. x का क्या मान हो कि निम्नलिखित व्यंजक पूर्ण वर्ग हो जाय—

(i) $x^4+6x^3+11x^2+3x+31$

(ii) $9x^4-12x^3+12x^2-13x+12$ (H.S. 60A)

(iii) $15x^{\frac{4}{3}}-24x+25x^{\frac{2}{3}}-20x^{\frac{1}{3}}+20$

39. $25x^{-2}-12x+16x^{-3}+4x^4-24x^{-5}$

40. $x^4+8x+7+11x^2+\frac{2}{x}+6x^3+\frac{1}{x^2}$

पच्चीस

अनुपात और समानुपात
(Ratio and Proportion)

---

104. परिभाषा—

दो सजातीय राशियों में से एक दूसरे का कितना गुणा, अथवा कौन सा हिस्सा है, यह जिस अभिन्न *(Integral)* अथवा भिन्न *(Fractional)* संख्या द्वारा प्रकट किया जाता है, उस विशुद्ध अर्थात् अन्वित संख्या *(Abstract number)* को पहली और दूसरी राशि का अनुपात *(Ratio)* कहते हैं। सामान्य रूप से दो राशियों का अनुपात पहली राशि को दूसरी राशि से भाग देकर निकाला जाता है और यह अनुपात एक भिन्न संख्या है। जैसे a और b दो राशियों का अनुपात $a : b$ या, $\frac{a}{b}$ के रूप में लिखा जाता है। a और b को अनुपात के पद *(Terms of the ratio)*, a को पूर्व-पद (*Antecedent*) और b को उत्तर-पद (*Consequent*) कहते हैं।

नोट—दो विषम जाति की राशियों के लिए कोई भी अनुपात नहीं है। जैसे 2 घंटा और 4 फीट के बीच कोई अनुपात नहीं हैं। इस सम्बन्ध के लिए राशियों को सजातीय होना आवश्यक है।

105. अनुपात की समता (Equality of Ratios)—

चूंकि अनुपात केवल एक भिन्न है, इसलिए बराबर भिन्नों द्वारा प्रकट किये गये अनुपात बराबर होंगे।

$$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}=\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}$$

इसलिए यदि किसी अनुपात के दोनों पदों को किसी एक ही संख्या से गुणा किया जाय या भाग दिया जाय, तो अनुपात का मान नहीं बदलता है।

106. अनुपातों का संयोजन (Composition of Ratios)—

(a) दो या अधिक अनुपातों के पूर्व-पदों के गुणनफल तथा उत्तर-पदों के गुणनफल के अनुपात को उन अनुपातों का मिश्र अनुपातों (*Compound ratio* कहते हैं। जैसे, $a : b$, $c : d$ और $e : f$ अनुपातों का मिश्र अनुपात $ace : bdf$ है।

नोट—$a : b$ अनुपात को उसी से मिश्र अनुपात बनाया जाय, तो बना हुआ अनुपात $a^2 : b^2$, $a : b$ का वर्गानुपा(*Duplicate ratio*) कहलाता है। उसी प्रकार $a^3 : b^3$, $a : b$ का घनानुपात कहलाता है इत्यादि।

(b) यदि दो अनुपात इस प्रकार हों कि एक का पूर्व पद दूसरे के उत्तर-पद के बराबर हो, तो वे एक दूसरे के व्युत्क्रम अनुपात कहे जाते हैं। $a : b$ और $b : a$ परस्पर व्युत्क्रम हैं। स्पष्टतः व्युत्क्रम अनुपातों का मिश्र अनुपातों होता है ।

(c) यदि किसी अनुपात का पूर्व-पद उत्तर-पद से बड़ा हो तो वह अनुपात गुरु अनुपात कहलाता है। यदि पूर्व-पद उत्तर-पद से छोटा हो तो वह अनुपात लघु अनुपात कहलाता है और यदि पूर्व-पद और उत्तर-पद आपस में बराबर हों, तो सम अनुपात कहलाता है।

107. अनुपात के प्रमेय—

(a) यदि किसी अनुपात के पदों में एक ही धनराशि जोड़ी जाय तो लघु अनुपात का मान बढ़ जाता है और गुरु अनुपात का मान घट जाता है।

मान लो कि दिया हुआ अनुपात $\frac{a}{b}$ द्वारा सूचित होता है, और उसके दोनों पदों के साथ x जोड़ने पर $\frac{a+x}{b+x}$ यह एक दूसरा ही अनुपात बन जाता है।

$$\text{तो } \frac{a+x}{b+x} - \frac{a}{b} = \frac{x(b-a)}{b(b+x)}$$

अतः मालूम होता है कि यदि b से a छोटा हो, तो अन्तरफल धनात्मक और यदि बड़ा हो तो अन्तरफल ऋणात्मक होगा। अगर b से a छोटा होगा, तो यह लघु अनुपात होगा और चूंकि अन्तरफल धनात्मक है, तो लघु अनुपात का मान बढ़ जाता है। साथ ही साथ अगर b से a बड़ा होगा तो यह गुरु अनुपात होगा और चूंकि अन्तरफल ऋणात्मक है, तो गुरु अनुपात का मान घट जाता है।

(b) यदि किसी अनुपात के पदों में एक ही धनराशि घटा दी जाय तो लघु अनुपात का मान घट जाता है और गुरु अनुपात का मान बढ़ जाता है।

मान लो कि दिया हुआ अनुपात $\frac{a}{b}$ द्वारा सूचित होता है और उसके दोनों पदों से x घटा लेने पर $\frac{a-x}{b-x}$ एक दूसरा ही अनुपात बन जाता है।

$$\text{तो } \frac{a-x}{b-x} - \frac{a}{b} = \frac{x(a-b)}{b(b-x)}$$

अतः मालूम होता है कि यदि a से b छोटा हुआ तो अन्तरफल धनात्मक और यदि बड़ा हुआ तो अन्तरफल ऋणात्मक होगा।

अगर a से b छोटा होगा, तो यह गुरु अनुपात होगा और चूंकि अन्तरफल धनात्मक है, तो गुरु अनुपात का मान बढ़ जाता है। साथ ही साथ अगर a से b

बड़ा होगा, तो यह लघु अनुपात होगा और चूंकि अन्तंरफल ऋणात्मक है, तो लघु अनुपात का मान घट जाता है।

108. समानुपात (Proportion)—

अगर चार राशियाँ परस्पर ऐसे सम्बन्ध रखती हों कि पहले और दूसरे का अनुपात, तीसरे और चौथे के अनुपात के बराबर हो, तो उन चार राशियों को समानुपाती (*Proportionals*) राशियाँ कहते हैं। जैसे, यदि $a:b=c:d$ हो, तो a, b, c, d चारों राशियों को समानुपाती राशियाँ कहा जायेगा। इस सम्बन्ध को अक्सर '$a : b :: c : d$' इस प्रकार लिखते हैं; और a और b का जो अनुपात है c और d का भी अनुपात वही है, इस प्रकार पढ़ा जाता है।

ऊपर दिये हुए अनुपात में a और d को (अर्थात् पहले और चौथे पद को) दो बाह्य पद (*Extrems*) और b और c को (अर्थात् दूसरे और तीसरे पद को) माध्यमिक पद (*Means*) कहते हैं। चौथे पद (अर्थात् d) को a, b, c का चतुर्थानुपाती (*Fourth proportional*) भी कहा जाता है।

यदि तीन या तीन से अधिक राशियाँ परस्पर इस प्रकार सम्बन्ध रखती हों कि पहले और दूसरे का अनुपात, दूसरे और तीसरे का अनुपात, तीसरे और चौथे का अनुपात, आदि अनुपात परस्पर बराबर हों, तो उन राशियों को उत्तरोत्तरानुपाती (*In-continued proportional*) कहते हैं। जैसे, यदि a, b, c, d ये चार राशियाँ ऐसी हों कि $a : b=b : c=c : d$, तो वे उत्तरोत्तरानुपाती राशियाँ होंगी।

यदि तीन राशियाँ a, b, c उत्तरोत्तरानुपाती हों (अर्थात् यदि $a : b=b : c$ हो), तो b को a और c का मध्यानुपाती (*Mean proportional*) और c को a और b का तृतीय अनुपाती (*Third proportional*) कहते हैं।

109. समानुपात के कुछ मुख्य नियम —

(A) यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, तो $ad=bc$

$$\because \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

दोनों पदों को bd से गुणा करने पर,

$$ad=bc$$

अतः यदि चार राशियाँ समानुपाती हों, तो बाह्य-पदों का गुणनफल मध्यपदों के गुणनफल के बराबर होता है।

उपसूत्र—यदि $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, तो $ac=b^2$ अर्थात् यदि तीन राशियाँ उत्तरोत्तरानुपाती हों, तो बाह्य-पदों का गुणनफल मध्य-पद के वर्ग के बराबर होता है।

नोट—इन नियमों से दो राशियां का मध्यानुपाती और राशियों का चतुर्थानुपाती निकाल जा सकता है।

(B) यदि $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, तो $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$

$$\because \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{b}{c}\times\frac{b}{c}$$

या, $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{a}$ $\left[\because \frac{b}{c}=\frac{a}{b}\right]$

या, $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$

अतः यदि तीन राशियाँ उत्तरोत्तरानुपाती हों, तो प्रथम और तृतीय का अनुपात प्रथम और द्वितीय के वर्गानुपात के बराबर होता है।

(C) यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, तो $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

$\because \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

या, $1 \div \frac{a}{b} = 1 \div \frac{c}{d}$ [1 में दोनों से भाग देने पर,

या, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

अतः यदि चार राशियाँ समानुपाती हों, तो दूसरी और पहली का अनुपात चौथी और तीसरी के अनुपात के बराबर होता है।

इस क्रिया को प्रतिलोमानुपात (*Invertendo*) कहते हैं।

(D) यदि $\frac{a}{b} = \frac{a}{d}$, तो $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$\because \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;

$\therefore \quad ad = bc,$ [*By cross multiplication*]

$\therefore \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

अतः यदि चार राशियाँ समानुपाती हों, तो एकान्तर पद भी समानुपाती होते हैं।

इस क्रिया को एकान्तरानुपात (*Alternendo*) कहते हैं।

(E) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, तो $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

$\because \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore \quad \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$

या, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

अतः यदि चार राशियाँ समानुपाती हों, तो पहली दोनों के योग का जो अनुपात दूसरी से होता है वही बची हुई दोनों के योग का चौथी से होता है।

इस क्रिया को योगानुपात (*Componendo*) कहते हैं।

(F) यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, तो $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$\because \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$\therefore \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$

या, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

अतः यदि चार राशियाँ समानुपाती हों, तो पहली और दूसरी के अन्तर का दूसरी से वही अनुपात होता है जो तीसरी और चौथी के अन्तर का चौथी से होता है।

इस क्रिया को अन्तरानुपात (*Dividendo*) कहते हैं।

(G) यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, तो $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

$\because \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$\therefore$ योगानुपात (*Componendo*) से,

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad \text{....(i)}$$

और अन्तरानुपात (*Dividendo*) से,

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad \text{....(ii)}$$

(i) में (ii) से भाग देने पर,

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

अतः यदि चार राशियाँ समानुपाती हों, तो पहली दो का योग और अन्तर का अनुपात अन्तिम दो के योग और अन्तर के अनुपात के बराबर होता है।

इस क्रिया को योगान्तरानुपात (*Componendo and Dividendo*) कहते हैं।

110. वज्रगुणन-नियम (Method of Cross Multiplication)

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad .... \quad (1)$$

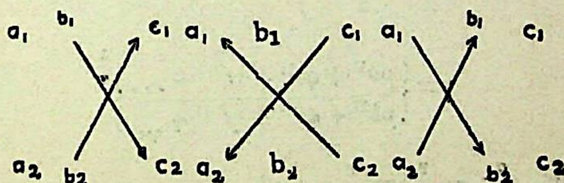
और $$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad .... \quad (2)$$

समीकरणों पर विचार कीजिये। इनमें तीन अज्ञात राशियाँ हैं, अतः हल करने के लिए तीन समीकरण का होना आवश्यक है। लेकिन इन दो समीकरणों से x, y, z का अनुपात निकाला जा सकता है। वह अनुपात,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ है।}$$

इस फल को वज्रगुणन-नियम कहते हैं।

इस नियम को निम्नलिखित प्रकार से याद रखा जा सकता है—



(i) x, y और z के गुणकों को ऊपर बताये गये की तरह लिखो।

(ii) गुणकों को तीरों द्वारा दर्शाये गये नियम से गुणा कीजिये। गुणा करते समय यह ध्यान में रखिये कि नीचे मुँह वाली तीरों से प्राप्त गुणनफल धन और ऊपर मुँह वाली तीरों से प्राप्त गुणनफल ऋण होंगे।

(iii) परिणाम— $b_1c_2-b_2c_1,\ c_1a_2-c_2a_1,\ a_1b_2-a_2b_1$ क्रमशः x, y, z के अनुपाती होंगे।

नोट—विद्यार्थियों को याद रखना चाहिए कि x के अनुपातवाले पद में x के गुणक नहीं हैं; इसी प्रकार y के अनुपातवाले पद में y के गुणक नहीं हैं; और z के अनुपातवाले पद में z के गुणक नहीं हैं।

इस नियम का प्रयोग निम्नलिखित स्थानों में किया जा सकता है—

(i) यदि दो दिये समीकरणों से तीन राशियों का अनुपात निकालना हो।

(ii) यदि दो अज्ञात राशिवाले कोई प्रथम घातीय युगपत् (*Simultaneous*) समीकरण हल करना हो। इसके लिए z के स्थान पर 1 मानकर क्रिया करनी चाहिए।

111. k-विधि (k-Method)—

समानुपात के प्रश्नों को हल करने के लिए k-विधि बड़ा ही लाभदायक है। इसमें हरेक अनुपातों का मूल्य k द्वारा व्यक्त किया जाता है और फिर भिन्न के अंश को हर में प्रकट किया जाता है। यह विधि निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण—यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=$ ....तो प्रत्येक अनुपात

$$=\left\{\frac{pa^n+qc^n+re^n+\ldots}{pb^n+qd^n+rf^n+\ldots}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

मान लो कि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\ldots=k$

$\therefore\quad a=bk,\quad c=dk,\quad e=fk,$

$$\therefore\quad\left\{\frac{pa^n+qc^n+re^n+\ldots}{pb^n+qd^n+rf^n+\ldots}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left\{\frac{p(bk)^n+q(dk)^n+r(fk)^n+\ldots}{pb^n+qd^n+rf^n+\ldots}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left\{k^n\frac{(pb^n+qd^n+rf^n+\ldots)}{(pb^n+qd^n+rf^n+\ldots)}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=(k^n)^{\frac{1}{n}}=k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}.$$

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $a:b=c:d$ हो, तो साबित करो कि—

$$\mathbf{a^2+ab+b^2 : a^2-ab+b^2 = c^2+cd+d^2 : c^2-cd+d^2}$$

(H. S. 61S, 65A)

$\because \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ (माना)

$\therefore \quad a=bk$ और $c=dk$

$$\therefore \quad L.H.S.=\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{b^2k^2+bk\cdot b+b^2}{b^2k^2-bk\cdot b+b^2}$$

$$=\frac{b^2(k^2+k+1)}{b^2(k^2-k+1)}=\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

और $R.H.S.=\frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}=\frac{d^2k^2+dk\cdot d+d^2}{d^2k^2-dk\cdot d+d^2}$

$$=\frac{d^2(k^2+k+1)}{d^2(k^2-k+1)}=\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

अतः $L.H.S.=R.H.S.$

उदाहरण 2. यदि a, b, c, d उत्तरोत्तर समानुपाती (*Continued proportion*) हो, तो साबित करो कि—

(i) $(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2$

(54A, 56S, 61A, H. S. 62A)

(ii) $(b+c)(b+d)=(c+a)(c+d)$

(57A, 59A, H. S. 60A)

$\because \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$ (माना)

$\therefore \quad a=bk; \quad b=ck; \quad c=dk$

अतः $a=bk=ck.k=dk\,k^2=dk^3$

$b=ck=dk^2$

और $c=dk$

(i) $L.H.S=(a-d)^2=(dk^3-d)^2=d^2(k^3-1)^2$

और $R.H.S.=(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2$

$=(dk^2-dk)^2+(dk-dk^3)^2+(d-dk^2)^2$

$=d^2(k^2-k)^2+d^2(k-k^3)^2+d^2(1-k^2)^2$

$=d^2\{k^4-2k^3+k^2 \;.\; k^2-2k^4+k^6$

$+1-2k^2+k^4\}$

$=d^2(k^6-2k^3+1)=d^2(k^3-1)^2$

$\therefore \quad L.H.S=R.H.S$

(ii) $L.H.S.=(b+c)(b+d)=(dk^2+dk)(dk^2+d)$

$=dk(k+1)\cdot d(k^2+1)$

$=d^2k(k+1)(k^2+1)$

$$R.H.S=(c+a)(c+d)=(dk+dk^3)(dk+d)$$

$$=dk(1+k^2)\cdot d(k+1)$$

$$=d^2k(k+1)(k^2+1)$$

$\therefore \quad L.H.S=R.H.S.$

उदाहरण 3. यदि $\dfrac{a}{b}=\dfrac{p}{q}$, तो साबित करो कि

$$(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2):\frac{\mathbf{a}^3}{\mathbf{a}+\mathbf{b}}=(\mathbf{p}^2+\mathbf{q}^2):\frac{\mathbf{p}^3}{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$$

$\because \quad \dfrac{a}{b}=\dfrac{p}{q}$

$\therefore \quad \dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}=k$ (माना) *(by alternendo)*

$\therefore \quad a=pk$ और $b=qk$

$$\therefore \quad L.\ H.\ S.=(a^2+b^2):\frac{a^3}{a+b}=(p^2k^2+q^2k^2):\frac{p^3k^3}{pk+qk}$$

$$=k^2(p^2+b^2):\ \frac{p^3k^3}{k(p+q)}$$

$$=k^2(p^2+q^2):\ \frac{p^3k^3}{p+q}$$

$$=(p^2+q^2)\ .\ \frac{p^3}{p+q}$$

$$=R.H.S.$$

उदाहरण 4. यदि $a:b=b:c$ हो, तो साबित करो कि—

(i) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2$

(63A, 65A, H.S. 64A)

(ii) $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$ (H.S. 60S)

$\because \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$ (माना)

$\therefore \quad a=bk$ और $b=ck$

अतः $\quad a=bk=ck^2$

$b=ck$

(i) $L.H.S.=(a+b+c)(a-b+c)$

$=(ck^2+ck+c)(ck^2-ck+c)$

$=c(k^2+k+1)\ c(k^2-k+1)$

$=c^2(k^2+k+1)(k^2-k+1)$

$=c^2(k^2+1+k)(k^2+1-k)$

$=c^2\{(k^2+1)^2-k^2\}$

$=c^2\{k^4+2k^2+1-k^2\}$

$=c^2(k^4+k^2-1)$

वोर $\quad R.H.S.=a^2+b^2+c^2$

$=c^2k^4-c^2k^2+c^2$

$=c^2(k^4+k^2+1)$

$\therefore \quad L.H.S.=R.H.S.$

(ii) $L.H.S.=a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$

$$=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{c^2a^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}$$

$$=\frac{c^2k^2\cdot c^2}{ck^2}+\frac{c^2\cdot c^2k^4}{ck}+\frac{c^2k^4\cdot c^2k^2}{c}$$

$$=\frac{c^4k^2}{ck^2}+\frac{c^4k^4}{ck}+\frac{c^4k^6}{c}$$
$$=c^3+c^3k^3+c^3k^6$$
$$=c^3(k^6+k^3+1)$$

और $R.H.S.=a^3+b^3+c^3$
$$=c^3k^6+c^3k^3+c^3$$
$$=c^3(k^6+k^3+1)$$

$\therefore$ $L.H.S.=R.H.S.$

उदाहरण 5. यदि $a:b=b:c=c:d$ हो, तो साबित करो कि
$\mathbf{a+b:b+c=b+c:b+d}$ (H.S. 63S)

$\because$ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$ (माना)

$\therefore$ $a=bk$, $b=ck$ और $c=dk$

अतः $a=bk=ck^2=dk^3$
$b=ck=dk^2$
$c=dk$

$\therefore$ $L.H.S.=\frac{a+b}{b+c}=\frac{dk^3+dk^2}{dk^2+dk}=\frac{dk^2(k+1)}{dk(k+1)}=k$

और $R.H.S.=\frac{b+c}{c+d}=\frac{dk^2+dk}{dk+d}=\frac{dk(k+1)}{d(k+1)}=k$

$\therefore$ $L.H.S.=R.H.S.$

उदाहरण 6. यदि $x:a=y:b=z:c$ हो, तो साबित करो कि

(i) $\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}}+\frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}}+\frac{\mathbf{z^2}}{\mathbf{c^2}}=\frac{\mathbf{3(x+y+z)^2}}{\mathbf{(a+b+c)^2}}$ (H.S. 61A, 64S)

(ii) $\frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{a^2}}+\frac{\mathbf{y^3}}{\mathbf{b^2}}+\frac{\mathbf{z^3}}{\mathbf{c^2}}=\frac{\mathbf{(x+y+z)^3}}{\mathbf{(a+b+c)^2}}$ (S.S. 62S)

$\because \quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$. (माना)

$\therefore \quad x=ak,\ y=bk$ और $z=ck$

(i) $L.H.S.=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

$$=\frac{a^2k^2}{a^2}+\frac{b^2k^2}{b^2}+\frac{c^2k^2}{c^2}$$

$$=k^2+k^2+k^2=3k^2$$

और $R.H.S.=3.\frac{(x+y+z)^2}{(a+b+c)^2}$

$$=3\frac{(ak+bk+ck)^2}{(a+b+c)^2}=\frac{3k^2(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=3k^2$$

$\therefore \quad L.H.S.=R.H.S.$

(ii) $L.H.S.=\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}$

$$=\frac{a^3k^3}{a^2}+\frac{b^3k^3}{b^2}+\frac{c^3k^3}{c^2}$$

$$=k^3(a+b+c)$$

और $R.H.S.=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}=\frac{(ak+bk+ck)^3}{(a+b+c)^2}$

$$=k^3\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}$$

$$=k^3(a+b+c)$$

$\therefore \quad L.H.S.=R.H.S.$

EXAMPLE 74

1. यदि $x : y = 3 : 4$ हो, तो $3y - x : 3x - y$ का अनुपात निकालो।

2. यदि $a : b = c : d$ हो, तो साबित करो कि

$$3a + 4b : 3c + 4d = 3a - 4b : 3c - 4d$$

3. यदि $a : b = c : d$ हो, तो साबित करो कि

$ma + nc : mb + nd = \sqrt{a^2 + c^2} : \sqrt{b^2 + d^2}$ (56A, 60S)

4. यदि a, b, c, d उत्तरोत्तरानुपाती (*Continued proportion*) हो,

तो साबित करो कि $a : d = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3}$ (63A, 60S)

5. यदि $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$ हो, तो साबित करो कि

$(a^2 + c^2 + e^2)(b^2 + d^2 + f^2) = (ab + cd + ef)^2$ (55S)

6. यदि $x : a = y : b = z : c$ हो, तो साबित करो कि

(i) $(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ax + by + cz)^2$

(ii) $\dfrac{xy + yz + zx}{ab + bc + ca} = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

7. यदि $(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) = (ab + cd)^2$ हो, तो साबित करो कि

$$a : b = c : d$$

8. यदि $x : y = m^2 : n^2$ हो और $m : n = \sqrt{p^2 + x^2} : \sqrt{p^2 - y^2}$ हो, तो $p^2 : xy = x + y : x - y$ होगा।

9. यदि $a : b = b : c = c : d$ हो, तो साबित करो कि

$$(a - d)^2 = (b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2$$

10. यदि $m : n = p : q$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{(m-n)(m-p)}{m} = (m+q) - (n+p)$$

11. यदि $a : b = b : c = c : d$ हो, तो साबित करो कि

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$$

12. यदि $a : b = c : d = \frac{e}{f}$ हो, तो साबित करो कि

$$\sqrt{(a+c+e)(b+d+f)} = (ab)^{\frac{1}{2}} + (cd)^{\frac{1}{2}} + (ef)^{\frac{1}{2}}$$

13. यदि $a : b = b : c$ हो, तो साबित करो कि

(i) $a : b = a^2 + b^2 : b^2 + c^2$

(ii) $a^2 + ab : b^2 = b^2 + bc : c^2$ (64S)

(iii) $a^2 : b^2 = a^2 + ab + b^2 : b^2 + bc + c^2 = a : c$

14. $a : b = b : c = c : d$ हो, तो साबित करो कि

(i) $a^3 + b^3 : b^3 + c^3 = b^3 + c^3 : c^3 + d^3$

(ii) $a : b = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} : \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

(iii) $a : b = ab + bc + cd : b^2 + c^2 + d^2$

(iv) $(a-c)^3 : (b-d)^3 = a : d$

(v) $(a+c)^4 : ac = (b+d)^4 : d^2$ (61S)

(vi) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$

(vii) $ac + bd = b^2 + c^2$ (58S)

(viii) $a(a+d) = (a+b)(a-b+c)$ (62S)

(ix) $(a+b)(b+c) - (a+c)(b+d) = (b-c)^2$ (65S)

15. यदि $a : b = c : d = e : f$ हो, तो साबित करो कि

(i) $a^2 : b^2 = (a + c + e)^2 : (b + d + f)^2$ (60A)

(ii) $(a^3 + c^3)^2 : (b^3 + d^3)^2 = e^6 : f^6$ (59S)

16. यदि $x : a = y : b$ हो, तो साबित करो कि

(i) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ (55A, 57S)

(ii) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{(x + y)^2}{(a + b)^2}$

17. यदि $x : a = y : b = z : c$ हो, तो साबित करो कि

(i) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 3\left(\dfrac{lx + my + nz}{la + mb + nc}\right)$

(ii) $\dfrac{xyz}{abc} = \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{a^3 + b^3 + c^3}$ (64A)

18. यदि $a_2, a_2, a_3, \ldots a_n$ उत्तरोत्तरानुपाती हो तो साबित करो कि

$x_1 : a_n = (a_1 : a_2)^{n-1}$

19. दो संख्याओं की निष्पत्ति 1 : 3 के बराबर है। दोनों संख्याओं में 4 घटाये जाने पर बची हुई संख्याओं की निष्पत्ति 1 : 4 के बराबर होती है; तो उन संख्याओं को निकालो।

20. दो लड़कों की उम्र की निष्पत्ति 3 : 4 है, 8 वर्ष बाद उनकी उम्र की निष्पत्ति 5 : 6 होगी दोनों की वर्त्तमान उम्र निकालो।

विविध उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $\dfrac{a}{y + z} = \dfrac{b}{z + x} = \dfrac{c}{x + y}$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{a(b - c)}{y^2 - z^2} = \frac{b(c - a)}{z^2 - x^2} = \frac{c(a - b)}{x^2 - y^2} \quad \text{(P.U 48S, 51A)}$$

पहली विधि $$\frac{a}{y+z}=\frac{b}{z+x}=\frac{c}{x+y}=k \text{ (माना)}$$

$$\therefore \quad a=k(y+z)$$

$$b=k(z+x)$$

$$c=k(x+y)$$

$$\therefore \quad b-c=k(z+x)-k(x+y)=-k(y-z)$$

$$\therefore \quad \frac{a(b-c)}{y^2-z^2}=-\frac{k(y-z).k(y+z)}{y^2-z^2}$$

$$=\frac{-k^2(y^2-z^2)}{y^2-z^2}=-k^2$$

इसी प्रकार, $$\frac{b(c-a)}{z^2+z^2}=-k^2=\frac{c(a-b)}{x^2-y^2}$$

$$\therefore \quad \frac{a(b-c)}{y^2-x^2}=\frac{b(c-a)}{z^2-x^2}=\frac{c(a-b)}{x^2-y^2}$$

दूसरी विधि $$\because \quad \frac{a}{y+z}=\frac{b}{z+x}=\frac{c}{x+y} \quad ....(1)$$

$$\therefore \quad \text{प्रत्येक}=\frac{b-c}{z+x-x-y}=\frac{c-a}{x+y-y-z}$$

$$=\frac{a-b}{y+z-z-x}$$

या, $$=\frac{b-c}{z-y}=\frac{c-a}{x-z}=\frac{a-b}{y-x}$$

या, $$= \frac{b-c}{y-z} = \frac{c-a}{z-x} = \frac{a-b}{x-y}$$

∴ (1) और (2) को संयुक्त करने पर,

$$\frac{a(b-c)}{(y+z)(y-z)} = \frac{b(c-a)}{(z+x)(z-x)} = \frac{c(a-b)}{(x+y)(x-y)}$$

या, $$\frac{a(b-c)}{y^2-z^2} = \frac{b(c-a)}{z^2-x^2} = \frac{c(a-b)}{x^2-y^2}$$

उदाहरण 2. यदि $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0$ हो, तो साबित करो कि $\mathbf{b-c : c-a : a-b = y-z : z-x : x-y}$ **(M.U. 63S)**

दिया हुआ है $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0$

साथ ही, हरेक हालत में $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$

इन दोनों समीकरणों को *Cross-multiplication* करने पर,

$$\frac{b-c}{y-z} = \frac{c-a}{z-x} = \frac{a-b}{x-y}$$

अतः $(b-c) : (c-a) : (a-b) = (y-z) : (z-x) : (x-y)$

उदाहरण 3. यदि $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b}$ हो, साबित करो कि

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{y+z-x}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{z+x-y}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{x+y-z}}$$

∵ $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b} = k$ (माना)

∴ $x = k(b+c)$

$y = k(c+a)$

$z = k(a+b)$

$\therefore \quad y+z-x=k(c+a+a+b-b-c)=2a\cdot k$

$\therefore \quad \dfrac{a}{y+z-x}=\dfrac{1}{2k}$

इसी प्रकार, $\dfrac{b}{z+x-y}=\dfrac{1}{2k}=\dfrac{c}{x+y-z}$

$\therefore \quad \dfrac{a}{y+z-x}=\dfrac{b}{z+x-y}=\dfrac{c}{x+y-z}$

उदाहरण 4. यदि $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$ हो, तो साबित करो कि

(i) यदि $a+b+c\neq 0$, तो $a=b=c$

(ii) हरेक अनुपात $=-1$ या $\frac{1}{2}$ (P.U. 45)

(i) $\because \quad \dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$

$\therefore \quad \dfrac{a}{b+c}+1=\dfrac{b}{c+a}+1=\dfrac{c}{a+b}+1$

या, $\dfrac{a+b+c}{b+c}=\dfrac{a+b+c}{c+a}=\dfrac{a+b+c}{a+b}$

या, $\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{1}{a+b}$ $(\because \quad a+b+c\neq 0)$

या, $b+c=c+a=a+b$

$\therefore \quad a=b=c$

(ii) यदि $a+b+c=0$ हो, तो $b+c=-a$;

$c+a=-b$ और $a+b=-c$

$\therefore$ पहला अनुपात $=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{a}{-a}=-1$

इसी तरह, $\frac{b}{c+a} = -1 = \frac{c}{a+b}$

यदि $a+b+c \neq 0$, तो साबित कर चुके हैं कि $a=b=c$

$\therefore$ पहला अनुपात, $= \frac{a}{b+c} = \frac{1}{2}$

इसी तरह, $\frac{b}{c+a} = \frac{1}{2} = \frac{c}{a+b}$

उदाहरण 5. यदि $\frac{a^2-bc}{x} = \frac{b^2-ca}{y} = \frac{c^2-ab}{z}$ हो, तो

साबित करो कि $\frac{x^2-yz}{a} = \frac{y^2-zx}{b} = \frac{z^2-xy}{c}$

$\because \frac{a^2-bc}{x} = \frac{b^2-ca}{y} = \frac{c^2-ab}{z} = k$ (माना)

$\therefore x = k(a^2-b\ )$

$y = k(b^2-ca)$

और $z = k(c^2-ab)$

$\therefore x^2-yz = k^2(a^2-bc)^2 - k^2(b^2-ca)(c^2-ab)$

$= k^2a(a^3+b^3+c^3-3abc)$

$\therefore \frac{x^2-y^2}{a} = k^2(a^3+b^3+c^3-3abc)$

इसी प्रकार, $\frac{y^2-zx}{b} = k^2(a^3+b^3+c^3-3abc) = \frac{z^2-xy}{c}$

$\therefore \frac{x^2-yz}{a} = \frac{y^2-zx}{b} = \frac{z^2-xy}{c}$

उदाहरण 6. यदि

$$\frac{x}{(b-c)(b+c-2a)}=\frac{y}{(c-a)(c+a-2b)}=\frac{z}{(a-b)(a+b-2c)}$$

हो, तो x + y + z का मूल्य निकालो।

$$\because \quad \frac{x}{(b-c)(b+c-2a)}=\frac{y}{(c-a)(c+a-2b)}$$

$$=\frac{z}{(a-b)(a+b-2c)}=k \quad (\text{माना})$$

$$\therefore \quad x=k(b-c)(b+c-2a)$$

$$y=k(c-a)(c+a-2b)$$

और $z=k(a-b)(a+b-2c)$

$$\therefore \quad x+y+z=k\{(b^2-c^2)-2a(b-c)+(c^2-a^2)$$

$$-2b(c-a)+(a^2-b^2)-2c(a-b)\}=0$$

उदाहरण 7. यदि $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$ हो, तो साबित करो कि $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

$$\because \quad \frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}=k \quad (\text{माना})$$

$$\therefore \quad (ay-bx)c=c^2k \qquad \text{....(i)}$$

$$(cx-az)b=b^2k \qquad \text{....(ii)}$$

और $(bz-cy)a=a^2k$ ....(iii)

अतः (i), (ii) और (iii) को जोड़ने पर,

$$0=k(a^2+b^2+c^2)$$

$\therefore \quad k=0 \quad (\because \quad a^2+b^2+c^2 \neq 0)$

$\therefore \quad ay-bx=0; \quad \therefore \quad ay=bx; \quad \therefore \quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ ....(1)

$ca-az=0; \quad \therefore \quad cx=az; \quad \therefore \quad \frac{x}{a}=\frac{z}{c}$ ....(2)

और $bz-cy=0; \quad \therefore \quad bz=cy; \quad \therefore \quad \frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ ....(3)

$\therefore$ (1), (2) और (3) से,

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

EXAMPLE 75

1. यदि $\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}$ हो, तो सावित करो कि

$$ax+by+cz=0$$

2. यदि $x=\frac{4ab}{a+b}$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2$$

3. यदि $\frac{b+c-a}{b+c}=\frac{c+a-b}{c+a}=\frac{a+b-c}{a+b}$ हो, तो साबित करो कि

हरेक भिन्न $=\frac{1}{2}$ अथवा 2

4. यदि $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$$

5. यदि $\frac{2x-y}{2a-b}=\frac{2y-z}{2b-c}=\frac{2z-x}{2c-a}$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

6. यदि $x=cy+bz$, $y=az+cx$ और $z=bx+ay$ हो, तो साबित करो कि $\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}$

7. यदि $a(y+z-x)=b(z+x-y)=c(x+y-z)$ हो, तो साबित करो कि $\frac{x}{a(b+c)}=\frac{y}{b(c+a)}=\frac{z}{c(a+b)}$

8. यदि $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ हो, तो साबित करो कि $(a+b+c)(yz+zx+xy)=(x+y+z)(ax+by+cz)$

9. यदि $\frac{x}{bc(b+c)}=\frac{y}{ca(c+a)}=\frac{z}{ab(a+b)}$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{b+c}{x(by+cz-ax)}=\frac{c+a}{y(cz+ax-by)}=\frac{a+b}{z(ax+by-cz)}$$

10. यदि $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{y^2-z^2}{b-c}=\frac{z^2-x^2}{c-a}=\frac{x^2-y^2}{a-b}$$

11. यदि $l(my+nz-lx)=m(nz+lx-my)=n(lx+my-nz)$

हो, तो साबित करो कि $\dfrac{y+z-x}{l}=\dfrac{z+x-y}{m}=\dfrac{x+y-z}{n}$

12. यदि $\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{x}=1$ और $a-b+z\neq 0$ हो, तो

साबित करो कि $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

13. यदि $a(m-n)+a^2=b(n-p)+b^2=c(p-m)+c^2$ हो, तो

साबित करो कि कि प्रत्येक $=\dfrac{a+b+c}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}$

14. यदि $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_3}=\dfrac{a_2}{a_4}=\ldots\ldots\ \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ हो तो साबित

करो कि $\left(\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{a_2+a_3+\ldots+a_n}\right)^{n-1}=\dfrac{a_1}{a_n}$

15. यदि $\dfrac{x^2-bc}{x}=\dfrac{b^2-ca}{y}=\dfrac{c^2-ab}{z}$ हो, तो साबित करो कि

$(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$

16. यदि $\dfrac{a-b}{ay+bx}=\dfrac{b-c}{bz+cy}=\dfrac{c-a}{cx+az}=\dfrac{a+b+c}{ax+by+cz}$ हो और

यदि $a+b+c\neq 0$ हो, तो साबित करो कि प्रत्येक अनुपात $=(x+y+z)^{-1}$

17. यदि $\dfrac{x}{y+z}=a,\ \dfrac{y}{z+x}=b,\ \dfrac{z}{x+y}=c$ हो, तो साबित

करो कि $\dfrac{x^2}{a(1-bc)}=\dfrac{y^2}{b(1-ca)}=\dfrac{z^2}{c(1-ab)}$

18. यदि $\dfrac{x - \dfrac{yz}{x}}{1 - yz} = \dfrac{y - \dfrac{zx}{y}}{1 - zx}$ और यदि x और y बराबर न हों,

तो साबित करो कि प्रत्येक अनुपात $= x + y + z$

या, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

19. यदि $x + y + z = 0$ और $\dfrac{x^2}{b-c} + \dfrac{y^2}{c-a} + \dfrac{z^2}{a-b} = 0$ हो,

तो साबित करो कि $x : y : z = (b-c) : (c-a) : (a-b)$

20. यदि $\dfrac{x}{b-c} + \dfrac{y}{c-a} + \dfrac{z}{a-b} = 0$ और $\dfrac{x}{b+c} + \dfrac{y}{c+a}$

$\dfrac{z}{a+b} = 0$ हो, तो साबित करो कि $\dfrac{x}{(b^2-c^2)(a^2-bc)}$

$= \dfrac{y}{(c^2-a^2)(b^2-ca)} = \dfrac{z}{(a^2-b)(c^2-ab)}$

21. यदि $ax + hy + gz = 0$

$hx + by + fz = 0$

$gx + fy + cz = 0$ हो, तो साबित करो कि

$$\frac{x^2}{bc - f^2} = \frac{y^2}{ca + g^2} = \frac{z^2}{ab - h^2}$$

22. यदि $\dfrac{x}{b+c-a} = \dfrac{y}{c+a-b} = \dfrac{z}{a+b-c}$ हो, तो

$(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z$ का मूल्य निकालो ।

23. यदि $\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}$ हो, तो साबित करो कि

(i) $x+y+z=0$

(ii) $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0$ (59A)

(iii) $(b+c-a)x+(c+a-b)y+(a+b-c)z=0$

24. यदि $a(by+cz-ax)=b(cz+ax-by)=c(ax+by-cz)$

हो, तो साबित करो कि $\frac{y+z-x}{a}=\frac{z+x-y}{b}=\frac{x+y-z}{c}$

25. यदि $\frac{a}{x}(b-c)+\frac{b}{y}(c-a)+\frac{c}{z}(a-b)=0$ हो, तो

साबित करो कि $\frac{x}{a}(y-z)\frac{y}{b}+(z-x)\frac{z}{c}+(x-y)=0$

छब्बीस

विविध समीकरण

(Miscellaneous Equations)

112. इस अध्याय में समीकरण के प्रश्नों को कुछ खास-खास तरीकों से हल किये जायेंगे। तरीका हल किये जानेवाले समीकरणों के रूप पर निर्भर करेगा।

113. वर्ग समीकरण में परिवर्तनशील (Reducible to Quadratic Equations)—बहुत ऐसे समीकरण हैं जो देखने में वर्ग समीकरण नहीं होते परन्तु अज्ञात राशि में उपयुक्त परिवर्तन करने से वर्ग समीकरण बन जाते हैं। ऐसे समीकरणों के अनेक रूप हैं, अतएव इसके हल के लिए कोई साधारण नियम नहीं दिया जा सकता। लेकिन नमूने के लिए नीचे कुछ तरह के समीकरण हल किये जाते हैं।

उदाहरण 1. हल करो—(i) $\sqrt{\frac{x}{a}}+12\sqrt{\frac{a}{x}}=7$

(ii) $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}}=2\frac{1}{6}$

(i) मान लो $\sqrt{\frac{x}{a}}=y$, तो $\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{1}{y}$

∴ दिया हुआ समीकरण

$$y+\frac{12}{y}=7$$

या, $y^2+12=7y$

या, $y^2-7y+12=0$

या, $y^2-4y-3y+12=0$

या, $y(y-4)-3(y-4)=0$

या, $(y-3)(y-4)=0$

$\therefore \quad y=3$ या 4

लेकिन $y=\sqrt{\dfrac{x}{a}}$

$\therefore \quad \sqrt{\dfrac{x}{a}}=3$

$\therefore \quad \dfrac{x}{a}=9$

$\therefore \quad x=9a$

फिर $\sqrt{\dfrac{x}{a}}=4$

$\therefore \quad x=16a$

$\therefore \quad x=9a$ या $16a$

(ii) दिये हुए समीकरण से,

$$\frac{x+1-x}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{13}{6}$$

या, $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}=\dfrac{13}{6}$

या, $36=169x(1-x)$

या, $169x^2-169x+36=0$

$$\therefore \quad x=\frac{169\pm\sqrt{169^2-4\cdot169\cdot36}}{2\times169}$$

$$=\frac{169\pm\sqrt{169\cdot25}}{2\times169}=\frac{169\pm65}{2\times169}=\frac{13\pm5}{26}$$

$\therefore\quad x=\frac{18}{26}$ या $\frac{8}{26}$

यानि $x=\frac{9}{13}$ या $\frac{4}{13}$

उदाहरण 2. हल करो—

(i) $4^{x-1}-3.2^{x-1}+2=0$ (D.U. 45

(ii) $4^{x}-3.2^{x+3}+128=0$ (Alig. 52)

(i) दिये हुए समीकरण को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$2^{2(x-1)}-3.2^{x-1}+2=0$$

या $(2^{x-1})^2-3(2^{x-1})+2=0$

माना कि $2^{x-1}=y$ तब,

$y^2-3y+2=0$

या, $y^2-2y-y+2=0$

या, $y(y-2)-1(y-2)=0$

या, $(y-1)(y-2)=0$

$\therefore\quad y=1;$ या 2

$\therefore\quad 2^{x-1}=1=2^0$

$\therefore\quad x-1=0$

$\therefore\quad x=1$

अथवा $2^{x-1}=2$

$\therefore\quad x-1=1$

$\therefore\quad x=2$

$\therefore\quad x=1;$ या 2

(ii) दिये हुए समीकरण को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$2^{2x} - 3\cdot2^{x+3} + 128 = 0$$

या, $(2^x)^2 - 3\cdot2^3\cdot(2^x) + 128 = 0$

या, $(2^x)^2 - 24(2^x) + 128 = 0$

माना कि $2^x = y$

$\therefore \quad y^2 - 24y + 128 = 0$

या, $y^2 - 16y - 8y + 128 = 0$

या, $(y-16)(y-8) = 0$

$\therefore \quad y = 8$ या 16

$\therefore \quad 2^x = 8 = 2^3; \quad \therefore \quad x = 3$

अथवा $2^x = 16 = 2^4; \quad \therefore \quad x = 4$

$\therefore \quad x = 3$ या 4

उदाहरण 3. हल करो—

(i) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x-\frac{1}{x}+4\right) = 11$ (P·U 54)

(ii) $4\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 8\left(x+\frac{1}{x}\right) = 29$ (P.U. 52)

(i) हम ज़ामते हैं कि $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 4$

अतः दिया हुआ समीकरण,

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x-\frac{1}{x}\right) - 8 + 4 - 11 = 0$$

या, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x-\frac{1}{x}\right) - 15 = 0$

या, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{x}\right)+1=16$

या, $\left(x-\frac{1}{x}-1\right)^2=4^2$

$\therefore \quad x-\frac{1}{x}-1=\pm 4$

$x-\frac{1}{x}-1=4$

$x^2-1-x=4x$

या, $x^2-5x-1=0$

$\therefore \quad x=\frac{5\pm\sqrt{25-4-(-1)}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25+4}}{2}$

$=\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}$

और अगर $x-\frac{1}{x}-1=-4$

या, $x^2-x-1=-4x$

या, $x^2+3x-1=0$

$\therefore \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\times(-1)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

(ii) हम जानते हैं कि $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-4$

अतः दिया हुआ समीकरण,

$$4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+8\left\{x+\frac{1}{x}\right\}-16=29$$

माना कि $x + \frac{1}{x} = y$

$\therefore \quad 4y^2 + 8y - 45 = 0$

या, $4y^2 + 18y - 10y - 45 = 0$

या, $2y(2y + 9) - 5(2y + 2) = 0$

या, $(2y - 5)(2y + 9) = 0$

$\therefore \quad y = \frac{5}{2}$ या $\frac{-9}{2}$

या, $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$; या, $\frac{-9}{2}$

अगर, $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$; या, $2x^2 + 2 = 5x$

या, $2x^2 - 5x + 2 = 0$

या, $2x^2 - 4x - x + 2 = 0$

या, $2x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$

या, $(x - 2)(2x - 1) = 0$

$\therefore \quad x = 2$; या $\frac{1}{2}$

अगर, $x + \frac{1}{x} = \frac{-9}{2}$, तो

$2x^2 + 2 = -9x$

या, $2x^2 + 9x + 2 = 0$

$\therefore \quad x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 16}}{2 \cdot 2} = \frac{-9 \pm \sqrt{65}}{4}$

उदाहरण 4. हल करो—

(i) $(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7) = 9$ **(P.U. 51)**

(ii) $(x + 2)(x - 5)(x - 6)(x + 1) = 144$ **(P.U. 55S)**

(i) दिया हुआ समीकरण,

$$\{(x-1)(x-7)\}\{(x-3)(x-5)\}=9$$

या, $(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)=9$

माना कि $x^2-8x=y$, तो

$$(x+7)(y+15)=9$$

या, $y^2+22y+105=9$

या, $y^2+22y+96=0$

या, $y^2+16y+6y+96=0$

या, $y(y+16)+6(y+16)=0$

या, $(y+6)(y+16)=0$

$\therefore$ $y=-6$; या -16

लेकिन $y=x^2-8x$

$\therefore$ $x^2-8x=-6$ या -16

अगर $x^2-8x=-6$; या, $x^2-8x+6=0$

या, $x=\dfrac{8\pm6\sqrt{4-24}}{2}=\dfrac{8\pm\sqrt{40}}{2}$ $=4\pm5$ ✓

और, अगर $x^2-8x=-16$

$\therefore$ $x^2-8x+16=0$

$\therefore$ $x=\dfrac{8\pm\sqrt{64-64}}{2}=4$

(ii) दिया हुआ समीकरण,

$$(x+1)(x-5)(x+2)(x-6)=144$$

या, $(x^2-4x-5)(x^2-4x-12)=144$

माना कि $x^2-4x=y$

$\therefore$ $(y-5)(y-12)=144$

या, $y^2-17y+60=144$

या, $y^2-17y-84=0$

या, $y^2-21y+4y-84=0$

या, $y(y-21)-4(y-21)=0$

या, $(y+4)(y-21)=0$

$\therefore$ $y=-4$ या 21

लेकिन $y=x^2-4x=-4$ या 21

अगर $x^2-4x=-4$

या, $x^2-4x+4=0$

या, $(x-2)^2=0$

$\therefore$ $x=2$

और, अगर $x^2-4x=21$

या, $x^2-4x-21=0$

या, $x^2-7x+3x-21=0$

या, $x(x-7)+3(x-7)=0$

या, $(x+3)(x-7)=0$

$\therefore$ $x=-3$ या 7

EXAMPLE 76

हल करो—

1. $15x+2=11\sqrt{x}$
2. $13x+\frac{5}{x}=19$
3. $\sqrt{\frac{x}{a}}+3\sqrt{\frac{a}{x}}=6$
4. $x^4-3x^2-1=0$
5. $8x^6-217x^3+27=0$
6. $x^4+52=17x^2$
7. $x^{-2}-10=3x^{-1}$
8. $x^4-37x=1728x^{-2}$

9. $x^{\frac{2}{3}}+12=7x^{\frac{1}{3}}$

10. $3^{2X}-4.3^X+3=0$

11. $2^{4X+3}\ 33.4^X+4=0$

12. $4^{X-1}-5.2^{X-2}+1=0$

13. $3^{2(X+1)}-3^{X+4}+9=3^X$

14. $2^{4+X}+2^{4-X}=257$

15. $5^{X+1}+5^{2-X}=5^3+1$

16. $3^{\frac{X+3}{3}}=4-3^{\frac{-X}{3}}$

17. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)-24=0$

18. $16x(x+1)(x+2)(x+3)=9$

19. $(x-2)(x+3)(x-3)(x+4)=40$

20. $(x+3)(x+4)(x-5)(x-6)=360$

21. $(x^2-25)(x^2-6x-16)=400$

22. $3\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$

23. $8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=0$

24. $4\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+8\left(x-\frac{1}{x}\right)=9$

25. $\frac{9}{1+x+x^2}=5-x-x^2$

114. व्युत्क्रम समीकरण (Reciprocal Equations;—

किसी समीकरण में यदि आदि और अन्त के समान दूरी के गुणांक *(co-efficients)* बराबर हों, तो उसे व्युत्क्रम समीरण कहते हैं। जैसे—

$$x^5+3x^4+4x^3+4x^2+3x+1=0$$

एक व्युत्क्रम समीकरण में यदि x के लिए $\frac{1}{x}$ रखा जाय तो यह

$$\frac{1}{x^5}+\frac{3}{x^4}+\frac{4}{x^3}+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x}+1=0$$

या, $1+3x+4x^2+4x^3+3x^4+x^5=0$ हो जाता है और यह पहले वाला ही समीकरण है।

इस प्रकार, यदि कोई व्युत्क्रम समीकरण दिया हुआ हो और यदि उस समीकरण में x के स्थान पर $\frac{1}{x}$ रखा जाय, तो सरल करने पर इस समीकरण में कोई परिवर्तन नहीं होता है; इसी कारण इसका नाम व्युत्क्रम समीकरण है।

नोट—यदि समीकरण में आदि और अन्त से समान दूरी के गुणांक बराबर परन्तु विपरीत चिह्न के हों तो भी वह व्युत्क्रम समीकरण होगा। जैसे

$$2x^4-5x^3+9x^2+5x-2=0$$

इन समीकरणों को हल करने की विधि निम्न साधित उदाहरणों से स्पष्ट होगी।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$ को हल करो।

(D.U. 43)

यह एक व्युत्क्रम समीकरण है, इसलिए आदि और अन्त से समदूरस्थ पदों को एक साथ रखने से दिये हुए समीकरण को इस प्रकार से लिखा जा सकता है—

$$(x^4+1)+(x^3+x)-4x^2=0$$

x^2 से भाग देने पर,

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

अब $x+\frac{1}{x}=y$ रखने पर, $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=y^2$

$$\therefore \quad y^2 - 2 + y - 4 = 0$$

या, $y^2 + y - 6 = 0$

या, $y^2 + 3y - 2y - 6 = 0$

या, $y(y+3) - 2(y+3) = 0$

या, $(y-2)(y+3) = 0$

$\therefore \quad y = 2$ या -3

$$\therefore \quad y = x + \frac{1}{x}$$

अतः $x + \frac{1}{x} = 2$ या -3

अगर $x + \frac{1}{x} = 2$	या अगर $x + \frac{1}{x} = -3$
या, $x^2 - 2x + 1 = 0$	और $x^2 + 3x + 1 = 0$
या, $(x-1)^2 = 0$	$\therefore \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$
$\therefore \quad x = 1$	

उदाहरण 2. $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0$ को हल करो—

(P.U. 39)

यह एक व्युत्क्रम समीकरण है, इसलिए आदि और अन्त से समदूरस्थ पदों को एक साथ रखने से दिये हुए समीकरण को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$(x^4 + 1) + 2(x^3 + x) - 13x^2 = 0$$

x^2 से भाग देने पर,

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 13 = 0$$

अब $x+\frac{1}{x}=y$ रखने पर,

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2$$

$\therefore$ दिया हुआ समीकरण,

$y^2-2+2y-13=0$

या, $y^2+2y-15=0$

या, $y^2+5y-3y-15=0$

या, $y(y+5)-3(y+5)=0$

या, $(y-3)(y+5)=0$

$\therefore$ $y=3$ या -5

$\because$ $y=x+\frac{1}{x}$,

अतः $x+\frac{1}{x}=3$ या -5

अगर $x+\frac{1}{x}=3$

या, $x^2-3x+1=0$

$\therefore$ $x=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

और अगर $x+\frac{1}{x}=-5$

या, $x^2+5x+1=0$

$\therefore$ $x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4}}{2}$

$=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

EXAMPLE 77

हल करो—

1. $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$
2. $6x^4-35x^3+6x^2-35x+6=0$

3. $x^4-5x^3+15x+9=0$
4. $5x^3-31x^2+31x-5=0$
5. $2x^4-x^3-11x^2-x+2=0$
6. $2x^4-15x^3+40x^2-45x+11=0$
7. $3x^4-20x^3-94x^2-20x+3=0$
8. $8x^4-42x^3+29x^2+42x+8=0$
9. $8x^4-54x^3+101x^2-54x+8=0$
10. $12x^4+77x^3+96x^2+77x+12=0$
11. $12x^4-91x^3+194x^2-91x+12=0$
12. $2x^5+x^4-12x^3-12x^2+x+2=0$
13. $x^4-2x^3-23x^2-12x+36=0$
14. $2x^3-5x^2+x+2=0$
15. $x^3-7x^2-3x+5=0$
16. $x^4-2x^3-8x^2+13x+6=0$

115. अमूलक समीकरण (Irrational Equations)—ऐसे समीकरण जिनमें अज्ञात राशि करणी चिन्ह के अन्तर्गत हो अमूलक समीकरण कहलाते हैं। इन समीकरणों को हल करने का सबसे आसान तरीका यह है कि एक पक्ष में केवल एक अमूलक राशि रखें और शेष को दूसरे पक्ष में ले जायँ और तब दोनों पक्षों को वर्ग करें। ऐसा करने से दिया हुआ समीकरण या तो वर्ग समीकरण बन जाता है या वर्ग समीकरण में परिवर्तनशील समीकरण बन जाता है। नीचे दिये गये साधित उदाहरणों से क्रियाएं स्पष्ट हो जायेंगी।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. हल करो—

(i) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+12}=\sqrt{2x+41}$ (P.U. 51)

(ii) $3x^2+\sqrt{3x^2+4z-6}=18-4x$ (P.U. 49)

(i) वर्ग करने पर,

$$x+5+x+12+2\sqrt{(x+5)(x+12)}=2x+41$$

या, $2\sqrt{(x+5)(x+12)}=24$

$\therefore$ $\sqrt{(x+5)(x+12)}=12$

फिर वर्ग करने पर,

$(x+5)(x+12)=144$

या, $x^2+17x+60=144$

या, $x^2+17x-84=0$

या, $x^2+21x-4x-84=0$

या, $x(x+21)-4(x+21)=0$

$\therefore$ $(x-4)(x+21)=0$

$\therefore$ $x=4;$ या -21

(ii) दिये गये समीकरण को निम्न तरीके से लिख सकते हैं—

$3x^2+\sqrt{3x^2+4x-6}+4x-18=0$

या, $3x^2+4x+\sqrt{3x^2+4x-6}-18=0$

अब इस समीकरण में, $\sqrt{3x^2+4x-6}=y$ रखें, तो

$y^2+6+y-18=0$

या, $y^2+y-12=0$

या, $y^2+4y-3y-12=0$

या, $y(y+4)-3(y+4)=0$

या, $(y-3)(y+4)=0$

$\therefore$ $y=3$ या -4

$\therefore$ $\sqrt{3x^2+4x-6}=3;$ या -4

अगर $\sqrt{3x^2+4x-6}=3$, तो

$3x^2+4x-6=9$

या, $3x^2-4x-15=0$

या, $3x^2+9x-5x-15=0$

या, $3x(x+3)-5(x+3)=0$

या, $(x+3)(3x-5)=0$

$\therefore \quad x=-3$; या $\frac{5}{3}$

फिर, अगर

$\sqrt{3x^2+4x-6}=-4$

$\therefore \quad 3x^2+4x-6=16$

या, $3x^2+4x-22=0$

$\therefore \quad x=\frac{-4\pm2\sqrt{70}}{6}$

$=\frac{-2\pm\sqrt{70}}{3}$

उदाहरण 2. हल करो— $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}$

Componendo और *Devidendo* का प्रयोग करने पर,

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1+2}{1-2}=\frac{3}{-1}$$ (P.U. 50)

या, $\frac{x+1}{x-1}=\frac{9}{1}$

या, $9x-9=x+1$

या, $8x=10$

$\therefore \quad x=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$

EXAMPLE 78

हल करो—

1. $\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{12x+1}$

2. $\sqrt{5x^2-6x+8}-\sqrt{5x^2-6x-7}=1$

3. $\sqrt{4x+3}+\sqrt{4x+7}=2$

4. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+21}=\sqrt{6x+40}$ (P.U. 47)

5. $\sqrt{3x+11}+\sqrt{3x}=\sqrt{12x-23}$

6. $\sqrt{5x-9}+\sqrt{6x-5}=\sqrt{16x+1}$ (P.U. 54)

7. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{2(a+b)}$

8. $x^2+3+5\sqrt{4-x+2x^2}=13+x-x^2$

9. $\dfrac{2\sqrt{x+5}-3\sqrt{x-16}}{2\sqrt{x+5}+3\sqrt{x-16}}=\dfrac{1}{4}$

10. $\dfrac{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x}}=5$

11. $\dfrac{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-5}}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-5}}=\dfrac{2x}{5}$ (P.U. 52)

12. $(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$

13. $(a-x)^{\frac{1}{3}}-(b-x)^{\frac{1}{3}}=(a-b)^{\frac{1}{3}}$

14. $(2x-p)^{\frac{1}{3}}+(3q-2x)^{\frac{1}{3}}=(3q-p)^{\frac{1}{3}}$

15. $(a+x)^{\frac{2}{3}}+(a-x)^{\frac{2}{3}}=4(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$

16. $\sqrt{x^2+7x+19}-\sqrt{x^2+7x-5}=2$

17. $\sqrt{3x^2-5x-6}+\sqrt{3x^2-5x+3}=9$

18. $\sqrt{5x^2+4x+8}+\sqrt{5x^2+4x-12}=10$

19. $2x^2 - 3\sqrt{2x^2 - 7x + 7} = 7x - 3$

20. $2x^2 - 3\sqrt{2x^2 - 3x - 1} = 3x - 1$

21. $3x^2 + \sqrt{3x^2 + 4x - 6} = 18 - 4x$ (P.U. 49)

22. $x^2 - 5x - 5\sqrt{x^2 - 5x + 4} + 10 = 0$ (D.U. 56)

23. $\sqrt{3x^2 - 2x + 4} = 3x^2 - 2x - 16$ (P.U. 50)

24. $\sqrt{4x^2 + 2x + 7} = 12x^2 + 6x - 119$

25. $\sqrt{3x^2 - 7x - 30} - \sqrt{2x^2 - 7x - 5} = x - 5$

सत्ताइस

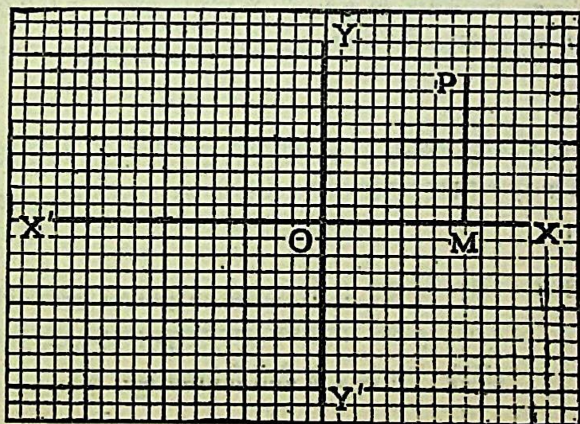
रेखा-चित्र

(Graphs)

116. किसी विन्दु का स्थान एवं कोई दो प्रकार की सम्बन्धित राशियों के पारस्परिक सम्बन्ध को हम चित्रों द्वारा अध्ययन कर सकते हैं। उनके पारस्परिक सम्बन्ध को समझने में चित्र से हमें काफी मदद मिलती है। केवल चित्र को एक वारगी नजर से देखकर उनके सम्बन्ध का अन्दाज लगाया जा सकता है।

117. एक बिन्दु की स्थिति-नियामक—**Co-ordinates of a Point)**--

किसी समतल (*Plane*) पर यदि एक विशेप विन्दु लिया जाय और उस विन्दु से परस्पर लम्ब रूप में खींची हुई दो सरल रेखाएं ली जायँ तो समतल पर किन्हीं बिन्दुओं का स्थान उन दोनों रेखाओं की सहायता से प्रकट किया जा सकता है।



मान लो कि किसी विशेष समतल पर XOX' और YOY' दो दी हुई सरल रेखाएं हैं जो एक दूसरे को लम्ब रूप में काटती हैं (पृष्ठ 503 का चित्र देखो)। यदि समतल पर P कोई भी बिन्दु हो, तो इस P बिन्दु की स्थिति किस प्रकार मालूम किया जाय, इस बात पर विचार करना है।

XOX' पूर्व-पश्चिम रेखा और YOY' उत्तर-दक्षिण रेखा मान ली जा सकती है। P बिन्दु से YOY' के समानान्तर एक सरल रेखा खींचो, और मान लो कि वह XOX' रेखा को M बिन्दु पर काटती है। चित्र से स्पष्ट है, कि M, O बिन्दु के पूर्व में है और P, M बिन्दु के उत्तर में है। इसलिए OM और PM दो रेखाओं की लम्बाई की नाप यदि मालूम हो, तो P बिन्दु का स्थान बताया जा सकता है।

नोट 1. इन दो स्थिर रेखाओं में से प्रत्येक को अक्ष (*Axis*) कहते हैं और XOX' और YOY' दोनों अक्ष जिस बिन्दु O पर एक दूसरे को काटते हैं, उसे मूल-बिन्दु (*Origin*) कहते हैं। XOX' को x-अक्ष रेखा (*Axis of* x) और YOY' को y-अक्ष रेखा (*Axis of* y) कहते हैं। MO और MP इन दोनों की लम्बाई नाप को P बिन्दु की भुज कोटि (*Co-ordinates*) कहते हैं, OM की लम्बाई को भुज (*Abscissa*) अथवा (x-*Co-ordinate*) और MP की लम्बाई को कोटि (*Ordinate*) अथवा (y-*Co-ordinate*) कहते हैं।

'(x, y) बिन्दु' अथवा 'x, y' का अर्थ है, "एक ऐसा बिन्दु जिसका भुज (*Abscissa*) x-इकाई लम्बा और जिसकी कोटि (*Ordinate*) y- इकाई लम्बी है।

नोट 2. (i) x-अक्ष पर स्थित सभी बिन्दुओं का y-नियायक शून्य है।
(ii) y-अक्ष पर स्थित सभी बिन्दुओं का x-नियामक शून्य है।
(iii) मूल बिन्दु के दोनों नियामक शून्य हैं।

118. चिन्हों का नियम (Rule of Signs)—

चिन्हों का नियम जानने के पहले यह जानना होगा कि पाद (*Quadrants*) हैं क्या ?

स्पष्टतः रेखाएं XOX' और YOY' तल को चार क्षेत्रों में विभाजित करती हैं, जैसे;

(i) तल जो रेखाएं OX और OY से घिरी हुई हैं।

(ii) तल जो रेखाएं OY और OX' से घिरी हुई हैं।

(iii) तल जो रेखाएं OX' और OY' से घिरी हुई हैं।

(iv) तल जो रेखाएं OY' और OX से घिरी हुई हैं।

इनको क्रमशः प्रथम पाद (*First quadrant*), द्वितीय पाद (*Second quadrant*); तृतीय पाद (*Third quadrant*) और चतुर्थ पाद (*Fourth quadrant*) कहते हैं, जिससे कि बिन्दु P निश्चित रूप से निर्धारित हो जाय OM और PM के बारे में उसकी दिशा (*Direction*) और माप (*Magnitude*) की जानकारी हो जाना आवश्यक हो जाता है क्योंकि अगर OM का सिर्फ माप दिया हुआ रहे तो हम यह नहीं जानते हैं, कि OM का OX की दिशा में नापना चाहिए या OX' की दिशा में। इसी प्रकार से अगर PM का सिर्फ माप दिया रहे तो हम यह नहीं जान पाते हैं कि PM को OY की दिशा में नापना चाहिए या OY' की दिशा में ।

दिशा के ज्ञान के लिए हम निम्नलिखित रूढ़ि (*Convention*) का व्यवहार करते हैं।

अगर बिन्दु YOY' की दाहिनी तरफ है तो बिन्दु के भुज (*Abscissa*) कोधनात्मक (*Positive*) लेते हैं और अगर बिन्दु YOY' की बाईं तरफ हो तो इसे ऋणात्मक (*Negative*) लेते हैं।

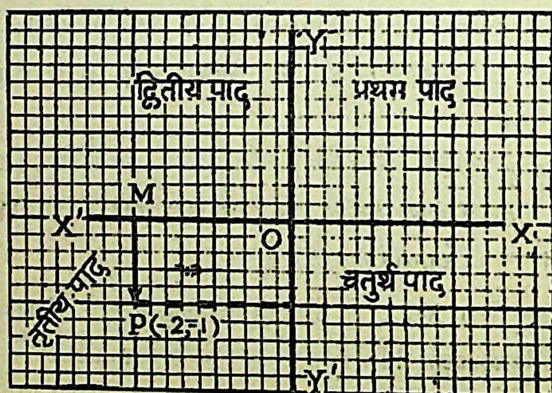
अगर बिन्दु रेखा XOX' के ऊपर हो तो बिन्दु के कोटि (*Ordinate*) को धनात्मक (*Positive*) लेते हैं और अगर बिन्दु रेखा XOX' के नीचे हो तो इसे ऋणात्मक लेते हैं।

इस प्रकार अगर बिन्दु P प्रथम पाद में है तो x और y नियामक धनात्मक हैं, अगर द्वितीय पाद में है तो x-नियामक ऋणात्मक है और y-नियामक धनात्मक है, अगर तृतीय पाद में है तो दोनों नियामक ऋणात्मक हैं, अगर चतुर्थ पाद में है तो x-नियामक धनात्मक है और y-नियामक ऋणात्मक हैं।

इस प्रकार चारो पादों को, जो ऊपर बतलाये गये हैं, अपने नियामक के अनुसार निम्नलिखित चिन्ह उपलब्ध हैं।

	x-नियामक	y-नियामक
प्रथम पाद	........+	+
द्वितीय पाद	........–	+
तृतीय पाद	...... –	–
चतुर्थ पाद	........+	–

नोट—इस प्रकार अगर हमें किसी विन्दु P $(-2, -1)$ को निर्धारित करना हो तो हम देखते हैं कि बिन्दु तृतीय पाद में स्थित है और इसका x-नियामक -2 इकाई की दूरी है और y-नियायक -1 इकाई की दूरी है। निम्न चित्र देखो।



119. बिन्दु अंकित करना (To Plot a Point)—

'विन्दु अंकित करना' का अर्थ है कि यदि बिन्दु के भुज-कोटि दिये हों, तो उनके द्वारा विन्दु की स्थिति निकालना।

विन्दु अंकित करने के लिए ग्राफ पेपर (*Graph paper*) का प्रयोग किया जाता है। इसमें बराबर दूरी पर दो तरह की समानान्तर सरल रेखाएं खींची हुई होती हैं। एक तरफ की रेखायें कागज की लम्बाई के समानान्तर और दूसरी तरफ की रेखाएं कागज की चौड़ाई के समानान्तर होती हैं। जो रेखाएं कागज की लम्बाई के समानान्तर खींची गयी हैं उनमें से किसी एक को x-अक्ष मानते हैं एवं जो रेखाएं कागज की चौड़ाई के समानान्तर खींची गयी हैं उनमें से किसी एक को सुविधा के अनुसार y-अक्ष मानते हैं। साधारणतः दोनों तरह की रेखाएं लगातार एक इंच के दशवें हिस्से या एक सेंमी०, के दशवें हिस्से की दूरी पर खींची हुई रहती हैं, इसलिए बहुत से छोटे-छोटे समान वर्ग बने रहते हैं। पहले प्रकार के ग्राफ पेपर इंच ग्राफ पेपर एवं दूसरे प्रकार के ग्राफ पेपर सेंटीमीटर ग्राफ पेपर कहलाता है। बिन्दु अंकित करने के लिए किसी एक ग्राफ पेपर पर परस्पर काटती हुई दो सरल रेखाओं को अक्ष मान लिया जाता है और उनको दूसरी रेखाओं से भिन्न करने के लिए कुछ मोटा कर दिया जाता है। जैसी आवश्यकता हो, उसके अनुसार x-अक्ष और y-अक्ष की दिशा में इकाई चुन ली जाती है। इकाई चुन लेने के बाद बिन्दु को अंकित किया जाता है, उदाहरण के लिए, यदि किसी बिन्दु का नियामक (1, 2) हो तो पहले x-अक्ष की धनात्मक दिशा में एक इकाई ले लेंगे और वहाँ पहुंचने के बाद तब y-अक्ष की धनात्मक दिशा में 2 इकाई ऊपर जायेंगे। इस तरह से वह बिन्दु जिसका नियामक (1, 2) प्रथम पाद में है, निर्धारित हो जायगा।

उदाहरण—निम्नलिखित बिन्दुओं को अंकित करो और बतलाओ कि वे किस पाद में हैं ?

(i) (8, 2) (ii) (−5, −10) (iii) (−8, 8) (iv) (6, −12)

विधि—*Graph paper* पर पहले XOX' तथा YOY' दो सरल रेखाएं खींचो जो एक दूसरे को O बिन्दु पर समकोण पर काटती हैं। फिर आवश्यकता अनुसार XOX' अथवा x-अक्ष और YOY' अथवा y-अक्ष पर इकाई चुन लो।

इन प्रश्नों पर स्केल;

x-अक्ष पर,

एक इकाई = छोटे वर्ग की एक भुजा

y-अक्ष पर,

एक इकाई = छोटे वर्ग की एक भुजा

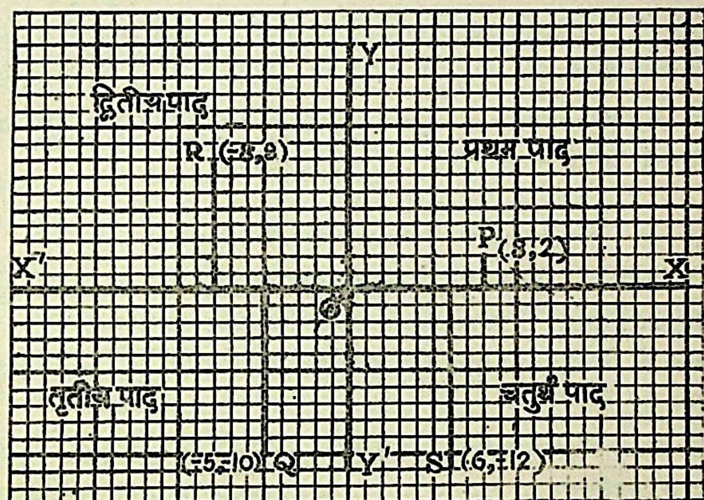
(i) इसमें बिन्दु का x-नियामक 8 है तथा y-नियामक 2 है। दोनों नियामक धनात्मक हैं। अतः यह बिन्दु प्रथम पाद में है। इस बिन्दु को अङ्कित करने के लिए x-अक्ष की दिशा में 8 इकाई लो और फिर वहाँ पहुँचकर y-अक्ष की दिशा में 2 इकाई ऊपर लो। तब हमें इष्ट बिन्दु मिल जायगा। ग्राफ पेपर पर यह बिन्दु P से दिखाया गया है।

(ii) इसमें बिन्दु का x-नियामक एवं y-नियामक दोनों ऋणात्मक हैं, अतः यह बिन्दु तृतीय पाद में स्थित है। इस बिन्दु $(-5, -10)$ को अङ्कित करने के लिए OX' की दिशा में 5 इकाई लो वहाँ पहुँचकर 10 इकाई OY' की दिशा में लो। वही इष्ट बिन्दु $(-5, -10)$ होगा। ग्राफ पेपर पर यह बिन्दु Q से दिखाया गया है।

(iii) इसमें बिन्दु का x-नियामक ऋणात्मक है और y-नियामक धनात्मक है। अतः बिन्दु द्वितीय पाद में है। इस बिन्दु $(-8, 8)$ को अङ्कित करने के लिए OX' की दिशा में 8 इकाई लो और वहाँ पहुँचकर फिर OY की दिशा स 8 इकाई लो। यही बिन्दु $(-8,8)$ होगा। ग्राफ-पेपर पर इसे R से दिखाया गया है।

(iv) इसमें बिन्दु का x-नियामक धनात्मक है तथा y-नियामक ऋणात्मक है। अतः बिन्दु चतुर्थ पाद में है। इस बिन्दु $(6, -12)$ को अङ्कित करने के लिए OX की दिशा में 6 इकाई लो फिर वहाँ पहुँचकर OY' की दिशा में 12

इकाई लो। वही बिन्दु (6, – 12) होगा। ग्राफ-पेपर में इसे *R* बिन्दु से दिखाया गया है।



EXAMPLE 79

निम्नलिखित बिन्दुओं को स्थित करो और बतलाओ कि वे किस पाद में हैं—

1. (7, 4) 2. (– 5, – 6) 3. (6, –3)
4. (– 3, 8) 5. (– 15, 5) 6. (– 9, – 9)
7. (8, 4) 8. (4, 8·5) 9. (– 6·5, – 8·5)
10. (– 7·5, 11) 11. (16, 6) 12. (2, 3)
13. (– 12, 5) 14. (– 12, – 10) 15. (0, 1)
16. (10, 8) 17. (2, 13) 18. (– 2, 8)

120. सरल समीकरणों का रेखा-चित्र (Graphs of Simple Eqautions)—

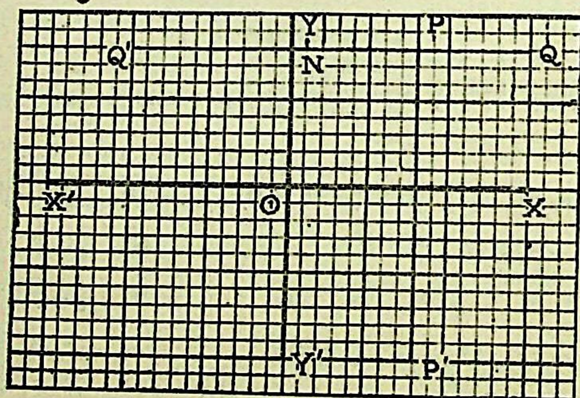
किसी समीकरण का रेखा-चित्र वह रेखा (सरल अथवा टेढ़ी) है जिस पर के प्रत्येक बिन्दु के नियामक समीकरण को संतुष्ट करते हैं। दूसरे शब्दों में हम यह भी कह सकते हैं कि उस बिन्दु का बिन्दु पथ (*locus*) है जो कि इस प्रकार चलता है कि उसके नियामक दिये हुए समीकरण को संतुष्ट करते हैं। नीचे दिये हुए उदाहरणों से यह विषय अच्छी तरह स्पष्ट हो जायगा।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. एक बिन्दु यदि इस प्रकार चलता रहे कि उसका भुज (*Abscissa*) हमेशा 8 इकाई हो, तो बताओ उस बिन्दु का पथ क्या है?

मान लो कि दिये गये ग्राफ-पेपर के प्रत्येक छोटे वर्ग की भुजा एक इकाई के बराबर पर है

इस प्रकार OX (अथवा x-अक्ष) पर एक बिन्दु M इस प्रकार लो कि $OM = 8$ इकाई हो। M बिन्दु से YOY' के समानान्तर PMP' रेखा खींचो।



अब स्पष्ट मालूम होता है कि PMP' रेखा पर किसी भी बिन्दु का भुज 8 इकाई

होगा। इसके सिवा अन्य किसी विन्दु का भुज 8 इकाई नहीं होगा। इसलिए उस विन्दु का पथ हमेशा PMP' रेखा होगा।

अतएव एक बिन्दु यदि इस प्रकार चलता रहे कि उसका भुज हमेशा 8 इकाई है, तो उसका बिन्दु पथ PMP' रेखा द्वारा सूचित होता है। इसे संक्षेप में कहा जाता है PMP' सरल रेखा $x=8$ इस समीकरण का रेखा-चित्र है।

नोट 1. इससे यह स्पष्ट विदित होता है कि $y=8$ समीकरण का रेखा चित्र QNQ' रेखा है जो XOX' के समानान्तर है।

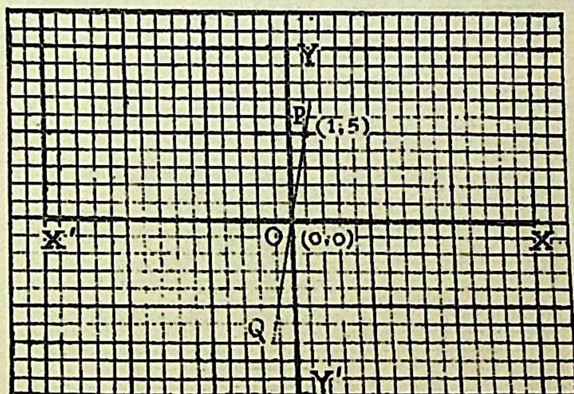
नोट 2. इससे स्पष्ट हो जाता है, $x=0$ का रेखा-चित्र y-अक्ष रेखा है, और $y=0$ का रेखा-चित्र x-अक्ष रेखा है।

उदाहरण 2. एक विन्दु यदि इस प्रकार चलता रहे कि उसका भुज (अर्थात् x) और कोटि (अर्थात् y) हमेशा $y=5x$ समीकरण द्वारा परस्पर सम्बन्ध रखते हों, तो बतलाओ कि उस बिन्दु का पथ क्या है?

चूँकि $y=5x$, जब $x=0$, $y=0$

और जब $x=1$, $y=5$

इसलिए, उस बिन्दु के दो स्थान (0, 0) और (1, 5) द्वारा मालूम होता है।



स्केल—

x-अक्ष पर, प्रत्येक छोटे वर्ग की एक भुजा = एक इकाई

y-अक्ष पर, प्रत्येक छोटे वर्ग की एक भुजा = एक इकाई

छोटे वर्ग के एक बाहु की लम्बाई इकाई मानकर (0, 0), (1, 5), बिन्दुओं को स्थापित करो। एक पटरी की सहायता से इन दोनों बिन्दुओं को मिलाओ। दोनों तरफ अनन्त तक फैली हुई सरल रेखा PQ उस बिन्दु का बिन्दु पथ होगा।

उदाहरण 3. $y = -3x + 4$ का रेखा-चित्र खींचो।

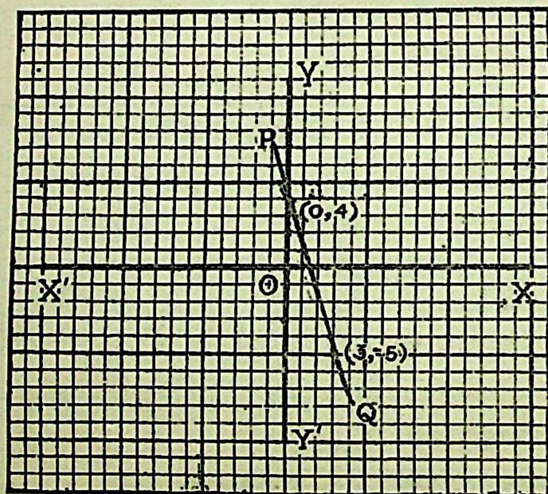
यह एक ऐसे बिन्दु का बिन्दु पथ है जो ऐसा घुमता है कि उनके नियामक (x, y) दिये हुए समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

दिये हुए समीकरण से यह जाना जाता है कि,

जब $x = 0$ और जब $x = 3$

$y = 4$ $y = -5$

इसलिए, उस बिन्दु के दो स्थान (0, 4) और (3, −5) द्वारा जाना जाता है।



स्केल—

x-अक्ष पर प्रत्येक छोटे वर्ग की एक भुजा = एक इकाई

y-अक्ष पर प्रत्येक छोटे वर्ग की एक भुजा = एक इकाई

छोटे वर्ग के एक बाहु की लम्बाई को इकाई मानकर (0,4) और (3, – 5) बिन्दुओं को स्थापित करो। एक पटरी की सहायता से इन दोनों बिन्दुओं को मिलाओ। दोनों तरफ अनन्त तक फैली हुई सरल रेखा PQ उस बिन्दु का बिन्दु पथ होगा।

नोट—व्यापक रूप से, यदि x और y में एक घात का समीकरण $ax + by + c = 0$ दिया हुआ हो तो वह हमेशा एक सरल रेखा प्रदर्शित करेगा।

स्मरणीय—रेखा-चित्र खींचते समय निम्न बातों पर ध्यान देना चाहिए—

(i) इकाई का ठीक-ठीक चुनना अति आवश्यक है। इकाई चुनते समय ग्राफ-पेपर की लम्बाई, चौड़ाई और सबसे बड़ी संख्या जो कि दर्शानी है, इन सब बातों को देखना अति आवश्यक है।

(ii) x और y का मान ऐसा चुनना चाहिए कि उसे आसानी से और ठीक-ठीक दर्शाया जा सके। जहाँ तक हो सके पूर्ण संख्या ही लेनी चाहिए।

(iii) x और y के लिए एक ही एकाई का चुनना आवश्यक नहीं है।

(iv) बिन्दु अङ्कित करने पर उसे इस प्रकार घेरे में कर देना चाहिए कि वह आसानी से पहचाना जा सके।

EXAMPLE 80

1. निम्नलिखित समीकरणों का रेखा-चित्र अङ्कित करो—

(i) $x = 5$ (ii) $x = 11$ (iii) $x + 5 = 0$

(iv) $y = 7$ (v) $y = 9$ (vi) $y + 3 = 0$

2. निम्नलिखित समीकरणों का रेखा-चित्र अङ्कित करो—

(i) $y = x$ (ii) $y = -x$ (iii) $y = 5x$

(iv) $x + y = 1$ (v) $x - y = 1$

(vi) $y + 2x = 0$ (vii) $y = -5x + 9$

(viii) $y = -8x - 11$ (ix) $3x = 7x + 4$
(x) $2x + 7y = 10$ (xi) $4x - 5y - 7 = 0$
(xii) $5x + 6y + 8 = 0$

3. निम्नलिखित समीकरणों का रेखा-चित्र अङ्कित करो—

(i) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ (ii) $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 2$

(iii) $\frac{x}{-8} + \frac{y}{13} = 1$ (iv) $y = \frac{5 - 7x}{6}$

(v) $y = \frac{9x - 13}{4}$ (vi) $\frac{3x}{4} - \frac{4y}{3} = 1$

4. निम्नलिखित व्यंजकों का रेखा-चित्र खींचो—

(i) $\frac{3x - 4}{5}$ (ii) $\frac{5x + 3}{6}$ (iii) $\frac{12 - x}{2}$

(iv) $\frac{14 - 5x}{4}$ (v) $x - 3$ (vi) $-7x + 8$

121. पहले घात के युगपत् समीकरणों को रेखा-चित्र द्वारा हल करना—

अभी तक हमने रेखा चित्र द्वारा किसी विन्दु के स्थान एवं किसी सरल रेखा का अध्ययन किया है। साथ ही साथ यह देखा है कि x और y में पहले घात के समीकरण का रेखा-चित्र एक सरल रेखा होता है। हम यह भी जानते हैं कि दो सरल रेखाएँ केवल एक ही बिन्दु पर एक दूसरे को काटती हैं। जहाँ पर ये रेखाएं एक दूसरे को काटती हैं उस बिन्दु के नियामक दोनों रेखाओं के समीकरणों को संतुष्ट करेंगे अर्थात् x, y का मान बतलायेंगे।

अतः x और y में दिये गये समीकरणों को हल करने के लिए उनके अलग-अलग रेखा-चित्र खींचना चाहिए और जहाँ पर वे एक दूसरे को काटते हैं उस बिन्दु के x-नियामक तथा y-नियामक x और y का मान बतलायेंगे।

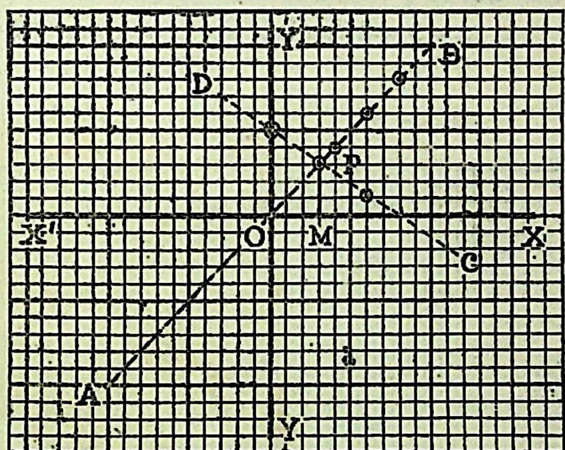
उदाहरण 1. $y - x = 0$
$2x + 3y = 15$ (H.S. 60A)

पहले समीकरण से, $y = x$

अतएव जब

x	0	2	4	6	8
y	0	2	4	6	8

स्केल—दोनों अक्षों की दिशा में छोटे वर्ग की एक भुजा = 1 इकाई। इन सब बिन्दुओं को अंकित करके मिलाने पर समीकरण का रेखाचित्र AB आता है।



दूसरे समीकरण से,

$$y = \frac{15 - 2x}{3}$$

अतएव जब

x	0	3	6	9
y	5	3	1	−1

स्केल—पहले की तरह।

इन सब बिन्दुओं को अंकित करके मिलाने पर दूसरे समीकरण का रेखा-चित्र CD आता है और AB और CD दोनों रेखाएं एक दूसरे को P बिन्दु पर काटती हैं। चित्र से P के नियामक (3, 3) हैं। अतः $x=3$, $y=3$.

उत्तर की शुद्धि-परीक्षा—दिये हुए समीकरणों में $x=3$ और $y=3$ रखने पर दोनों समीकरण संतुष्ट हो जाते हैं।

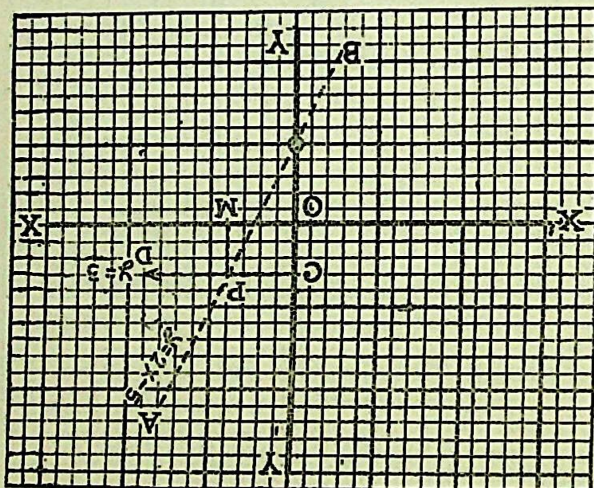
उदाहरण 2. रेखा-चित्र द्वारा हल करो— $2x-5=3$

इस प्रश्न में $y=2x-5$ और $y=15$, इन दोनों राशियों का रेखा-चित्र खींचकर उनके छेदन बिन्दु का नियामक निकालना होगा।

$y=2x-5$ समीकरण से x और y का युगपत् मान

$x=0$ और $x=4$

$x=-5$ $y=3$



स्पष्टतः— $y=2x-5$ का रेखा-चित्र रेखा AB है तथा $y=3$ का रेखा-चित्र CD है। ये दोनों सरल रेखाएं एक दूसरे को P बिन्दु पर काटती हैं जहां $x=4$ है।

$\therefore \quad x=4$ ही दिये हुए समीकरण का मूल है।

उदाहरण 3. $x-2y+12=0 \quad x+y+3=0$, और $5x-y-21=0$, इन तीन सरल रेखाओं द्वारा जो त्रिभुज बनता है उसके तीनों शीर्षों के नियामक एवं त्रिभुज का क्षेत्रभल निकालो।

पहले समीकरण से,

$x=0$ और $x=-2$

$y=6$ $\quad y=0$

दूसरे समीकरण से,

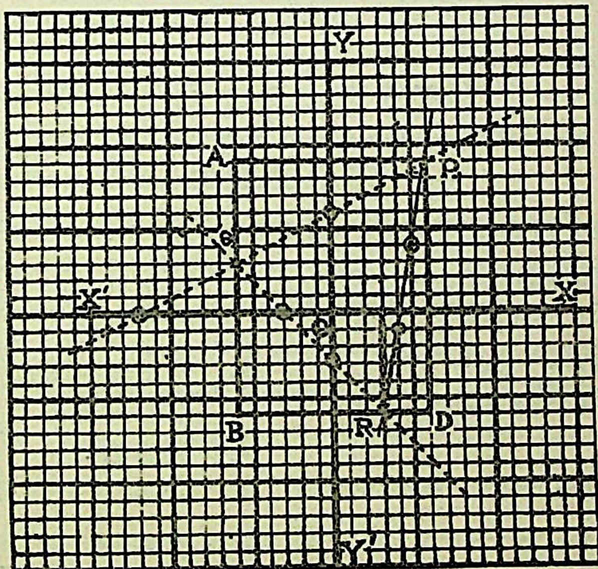
$x=0$ और $x=-3$

$y=-3$ $\quad y=0$

और तीसरे समीकरण से,

$x=4$ और $x=5$

$x=-1$ $\quad y=4$



ग्राफ-पेपर के छोटे वर्ग के एक बाहु को लम्बाई को इकाई मानकर पहले, दूसरे और तीसरे समीकरण के रेखा-चित्र खींचो। एक त्रिभुज PQR मिलेगा। चित्र से स्पष्ट है कि

P के नियामक (6,9) है,
Q के नियामक (– 6, 3) है
और R के नियामक (3, – 6) है।

अब P, Q, R से दो अक्षों के समानान्तर कई रेखाएं खींचकर देखा जाता है कि,

$$\triangle PQR = \text{आयत } ABDP - \triangle QAR - \triangle QBR - \triangle RDP$$

$$= AB \times BD - \frac{AP \times AQ}{2} - \frac{QB \times BR}{2} - \frac{RD \times DP}{2}$$

$$= 15 \times 12 - \frac{12 \times 6}{2} - \frac{9 \times 9}{2} - \frac{3 \times 15}{2}$$

$$= 180 - 36 - \frac{81}{2} - \frac{45}{2} = 81 \text{ वर्ग इकाई}$$

EXAMPLE 81

रेखा-चित्र द्वारा निम्नलिखित समीकरणों को हल करो—

1. $3x + 2y = 3$
   $5x + 3y = 2$

2. $3x - 4y = 5$
   $5x + 2y = 17$

3. $x + y = 9$
   $3x - 2y = 7$

4. $4x + 3y = 13$
   $3x + 2y = 11$

5. $x = 7$
   $3x + 2y = 1$ (H.S. 60S)

6. $3y = 2x - 5$
   $13y = 5x + 4$ (H.S. 61A)

7. $3x - 2y = 4$
   $x + y = 13$ (H.S- 61S)

8. $y = 3x$
   $x + y = 8$ (H.S. 62A)

9. $3x+2y=6$
$y-3x=3$ (H.S. 62S)

10. $3x-4y=2$
$x+y=10$ (S.H. 63S)

11. $2x+y=0$
$\frac{x}{y}-3x=8$

12. $x-y=4$
$\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=5$

13. $\frac{x}{7}+\frac{y}{5}=1\frac{3}{7}$
$x+\frac{y}{3}=4\frac{2}{3}$

14. $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=4$
$4x-5y=2$

15. $5x-3y=11$
$2y-3x+4=0$

16. $\frac{2x+7}{3}=\frac{3x-7}{2}$ (H.S. 64A)

17. $\frac{4x-3}{5}=\frac{6x}{7}-1$

18. $x-12=-3$

19. $5x-13=7$

20. $2x^2-3x+2=0$

21. $x^2-3x+2=0$

22. $x^2+y^2=25$
$3x-4y=0$ (H.S. 63A)

23. $-x+3y=18$, $x+7y=22$ और $y+3x=26$ द्वारा सूचित तीन सरल रेखाओं द्वारा जो त्रिभुज बनता है उसके शीर्ष विन्दुओं के नियामक और त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो।

24. दिखाओ कि, $4x-y=16$, $3x-2y=7$ और $x+y=9$ द्वारा सूचित तीन सरल रेखाएं एक विन्दुगामी हैं और समच्छेदन बिन्दु (*Point of concurrence*) के नियामक निकालो।

25. नीचे दिये हुए समीकरणों के रेखा-चित्र द्वारा जो चतुर्भुज बनते हैं, उनके शीर्ष बिन्दुओं के नियामक और उनमें प्रत्येक के क्षेत्रफल निकालो—

(i) $x+y-10=0$, $x-y+10=0$, $x+y+10=0$ और $x-y-10=0$

(ii) $x+y=3$, $\frac{x}{3}-\frac{y}{3}=1$, $\frac{x+y}{3}=-1$ और $x-y+3=0$

(iii) $x=1$, $y=5$, $x=12$ और $y=10$

(iv) $x=0$, $y=0$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$ और $\frac{x}{8}+\frac{y}{12}=1$

122. समीकरण संबन्धी प्रश्नों को हल करने में रेखा-चित्र का प्रयोग—

उदाहरण 1. इलाहाबाद में वर्ष 1959 में प्रतिमाह जो गर्मी पड़ी इसका विवरण निम्न प्रकार है—

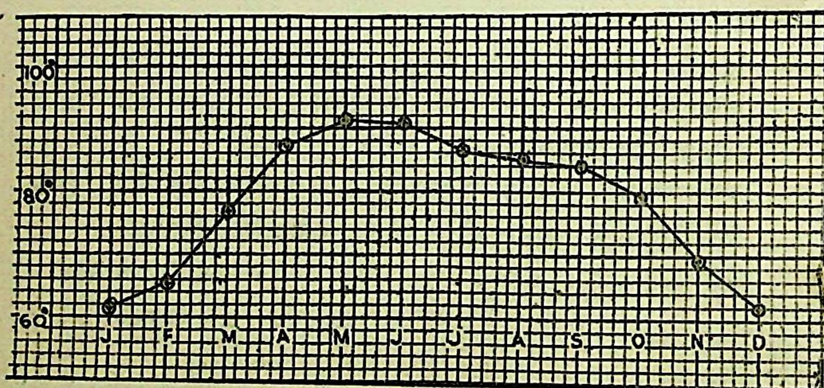
माह	J.	F.	M.	A.	M.	J.	J.	A.	S.	O.	N	D.
तापक्रम	61.3°F	65.6°F	76.8°F	87.3°F	93.1°F	92.6°F	86.4°F	84.4°F	84.3°F	79.3°F	79.4°F	61.7°F

रेखाचित्र द्वारा प्रकट करो।

स्केल—

x-अक्ष की दिशा में पाँच छोटे-छोटे भाग = 1 महीना

y-अक्ष की दिशा में एक छोटा भाग = 2 फारेन हाइट



उदाहरण 2. किसी वर्ष पटना में वर्षा की तालिका निम्न प्रकार से है।

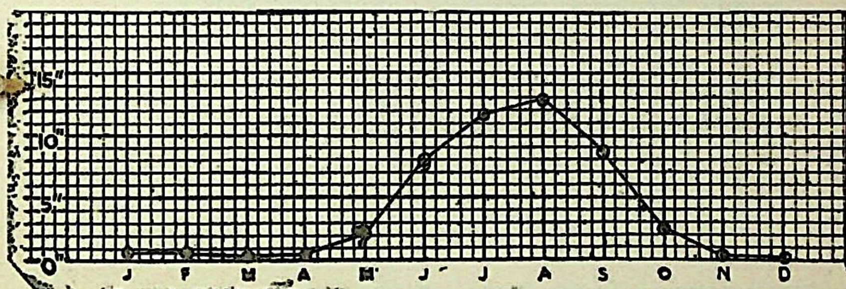
माह	J.	F.	M.	A.	M	J.	J	A.	S.	O.	N.	D
ईंचों में	0.6"	0.6"	0.3"	0.4"	2.1"	7.7"	11.8"	12.9"	8.8"	2.5"	0.2"	0.1"

रेखा-चित्र द्वारा इसे प्रकट करो।

स्केल—

x-अक्ष की दिशा में पांच छोटे-छोटे भाग = 1 महीना

y-अक्ष की दिशा में एक छोटा भाग = 1 ईंच



उदाहरण 3. निम्नलिखित तालिका वार्षिक प्रीमियम बतलाती है जो कि 1000 रु० के लिए देने पड़ते हैं।

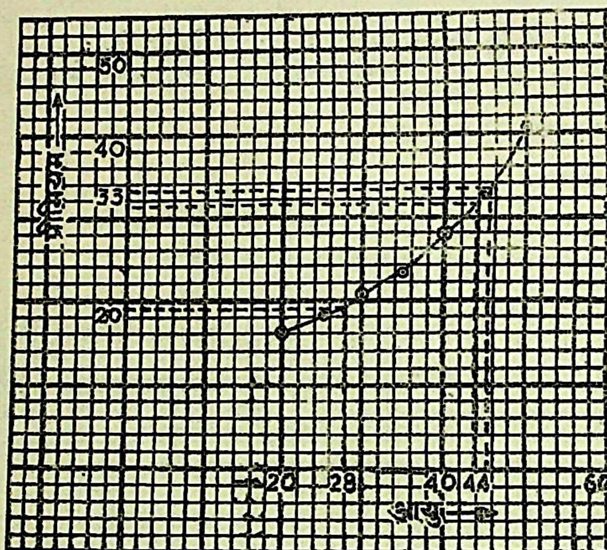
आयु वर्षों में	20	25	30	35	40	45	50
प्रीमियम रुपयों में	16	18	20·5	23·4	28	32·5	40 6

एक रेखा-चित्र बनाओ। 28 और 44 वर्षों की आयु के मनुष्यों को कितनी प्रिमियम देनी चाहिए। उस मनुष्य की आयु बतलाओ जो 33 रु० प्रीमियम देता है।

स्केल—

x-अक्ष की दिशा में एक छोटा भाग = 2 वर्ष

y-अक्ष की दिशा में एक छोटा भाग = 2 रुपया



ग्राफ से यह स्पष्ट है कि 28 और 44 वर्षों की आयु के मनुष्यों को क्रमशः 19·8 रु० और 31·4 रु० देना चाहिए। फिर ग्राफ से यह स्पष्ट है कि उस मनुष्य की आयु, जो 33 रु० प्रीमियम देता है, $45\frac{1}{2}$ वर्ष है।

उदाहरण 4. एक मनुष्य x वर्ष का है और y वर्ष तक जीवित रहने की आशा है—

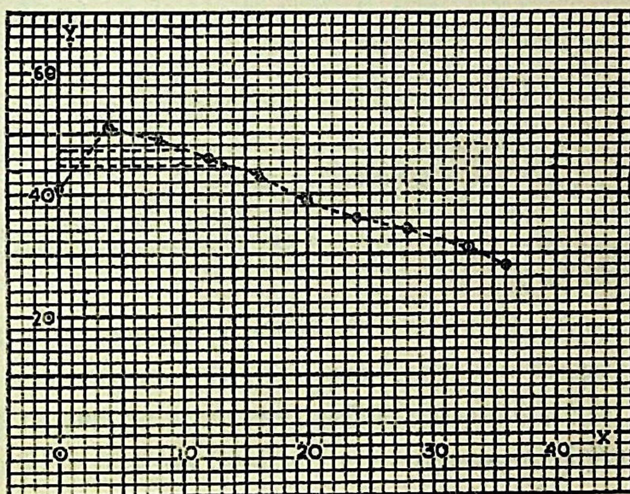
x	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
y	41	51	44	46	43	39	36	34	31	28

रेखा-चित्र द्वारा इसे दर्शाओ और जिन मनुष्यों की आयु 10 और 14 वर्ष है उनकी अनुमानित आयु निकालो।

स्केल—

x-अक्ष की दिशा में 1 छोटा भाग = 1 वर्ष

y-अक्ष की दिशा में 1 छोटा भाग = 2 वर्ष



ग्राफ से यह स्पष्ट होता है कि जिन मनुष्यों की आयु 10 और 14 वर्ष है उनकी अनुमानित आयु क्रमशः 44·25 वर्ष और 47·50 वर्ष की है।

उदाहरण 5. किसी काम को A, 10 दिन में, B, 12 दिन में और C, 15 दिन में पूरा करता है। हरेक एक दिन में कितना काम कर सकता है, उसे रेखा-चित्र द्वारा प्रदर्शित करो। रेखा-चित्र से यह भी पता लगाओ कि,

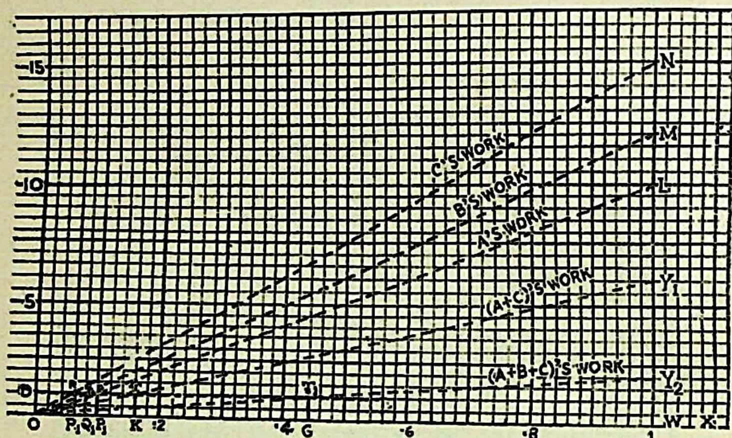
(i) A और C दोनों मिलकर कितना दिन में पूरा काम खत्म कर सकते हैं।

(ii) तीनों मिलकर दो दिन में कितना काम खत्म कर सकते हैं।

स्केल—

x-अक्ष की दिशा में 5" = पूरा काम

y-अक्ष की दिशा में 1" = 5 दिन



A, 10 दिन में, B, 12 दिन में और C, 15 दिन में जो पूरा काम करता हैं, वह ग्राफ पर क्रमश: रेखाएँ OL, OM तथा ON द्वारा दिखायी गयी हैं। अब वे तीनों एक दिन में कितना काम करेंगे यह निकालना है फिर स्केल से स्पष्ट है कि y-अक्ष पर 1 दिन 2 छोटे-छोटे भाग के बराबर है। OD $=2$ छोटे भाग के (मान लो)। फिर D से OX के समानान्तर DS रेखा खींचा जो OL, OM और ON को क्रमश: P, Q और R बिन्दुओं पर काटती है। फिर P, Q एवं R से क्रमश: PP_1, OQ_1, और RR_1, लम्ब OX पर खींचा तब OP_1, OQ_1, तथा OR_1, क्रमश: A, B, C द्वारा किये गये 1 दिन में काम को प्रदर्शित करता है।

फिर स्पष्टत:,

$$A \text{ द्वारा 1 दिन में किया गया काम} = OP_1 = 5 \text{ इकाई}$$

$$= \frac{1}{50} \times 5 = \cdot 10 \text{ भाग}$$

$$B \text{ द्वारा 1 दिन में किया गया काम} = OQ_1 = 4 \text{ इकाई}$$

$$= \frac{1}{50} \times \; = \cdot 08 \text{ भाग}$$

एवं C द्वारा 1 दिन में किया गया काम $= OR_1 = 3$ इकाई

$$= \frac{1}{50} \times 3 = \cdot 06 \text{ भाग}$$

और $A+B+C$ द्वारा 1 दिन में किया गया काम $= 12$ इकाई
$A+C$ द्वारा 1 दिन में किया गया काम $= 8$ इकाई

अब x-अक्ष पर कोई बिन्दु $K = 8$ इकाई लो। K से *Vertical* दिशा में एक लम्ब खींचो जो DS को T बिन्दु पर काटता है। OT को मिलाओ और आगे बढ़ाओ। मानलो कि वह WL को y, बिन्दु पर काटता है। ग्राफ से $WY_1 = 12$ इकाई अर्थात् $A+C$, पूरा काम $\frac{12}{2} = 6$ दिन में खत्म कर देगा।

फिर x-अक्ष पर $OG = 12$ इकाई लो। G से *Vertical* दिशा में एक लम्ब खींचो जो DS को T_1, बिन्दु पर काटता है। OT_1, को मिलाओ और आगे बढ़ाओ। मानलो वह WL को Y_2 बिन्दु पर काटता है। ग्राफ से $WY = 4$ इकाई अर्थात् $A+B+C$ पूरा काम $\frac{4}{2} = 2$ दिन में खत्म कर देगा।

EXAMPLE 82

1. किसी बीमार मनुष्य के ज्वर के तापक्रम की माप भोर से शाम तक ली गयी है।

समय	6	8	10	12	2	4	6	8
तापक्रम	99°F	99.6°F	100°F	100.3°F	100·1°F	100·5°F	90·8°F	100·1°F

इसे रेखा-चित्र द्वारा प्रकट करो।

2. पटना में किसी वर्ष प्रतिमाह जो गर्मी पड़ी, उसका विवरण निम्न प्रकार है—

माह	J.	F.	M.	A.	M.	J.	J.	A.	S.	O.	N.	D.
तापक्रम	60.2°F	64.5°F	75.7°F	90.0°F	89.0°F	86.8°F	83.6°F	83.1°F	83.3°F	79.4°F	69.5°F	61.6°F

इसे रेखा-चित्र द्वारा स्पष्ट करो।

3. एक लड़के की आयु और वजन निम्नलिखित तालिका के अनुसार है—

आयु वर्षों में	6	8	10	12	14	16	18	20
वजन पौंड में	52	60	68	80	92	103	115	130

चित्र-द्वारा लड़के का 7, 9, और 11 वर्ष की आयु में लगभग वजन बताओ।

4. किसी देश की संख्या (करोड़ में) इस प्रकार है—

वर्ष	1881	1891	1901	1911	1921	1931	1941	1951
जनसंख्या	17·8	22·1	22·8	24·3	26·1	29·0	36·6	35·7

रेखा-चित्र खींचो। सन् 1925 में जनसंख्या कितनी थी ?

5. एक होटल मैनेजर द्वारा मेहमानों पर व्यय का अन्दाजा इस प्रकार है—

संख्या मेहमान	150	200	250	300	350	400
व्यय प्रत्येक पर रुपये में	6·00	4 80	4·15	3·60	3·25	3·00

रेखा-चित्र द्वारा 175, 225 तथा 375 मेहमान होने पर प्रत्येक पर कितना व्यय होगा, मालूम करो।

6. एक लड़के और लड़कियों का वजन (पौंड में) इस प्रकार है—

आयु वर्ष में	2	4	6	8	10	12	14	16
लड़के	29	36	42·5	52·5	64	75	17	110
लड़कियाँ	27	34	41	50	60	73	92·5	108

इसको रेखा-चित्र से दर्शाओ। 9 वर्ष की आयु पर दोनों का वजन मालूम करो। वह आयु मालूम करो जब कि वजन बराबर होंगे।

7. एक काम को *A*, 3 दिन में करता है और उसी काम को *B*, 6 दिन में करता है। रेखा-चित्र द्वारा बतलाओ कि दोनों मिलकर उस काम को कितने दिनों में करेंगे ?

8 एक हौज एक नल *A* द्वारा 30 मिनट में भरा जाता है। और नल *B* द्वारा 45 मिनट में खाली हो जाता है। यदि हौज खाली है और दोनों नल एक साथ खोल दिये जायँ तो बताओ कि हौज कब भर जायेगा।

9. एक मनुष्य एक शहर *A* को 9 *A. M.* पर छोड़ता है और 4 मील प्रति घंटा की चाल से *B* शहर को छोड़ चलता है जो 20 मील की दूरी पर है। 10 *A. M.* पर उसका मित्र शहर *B* से साइकिल पर उससे मिलने के लिए 8 मील प्रति घंटा की चाल से चलता है।

10·30 *A.M.* पर पैदल चलने वाला 15 मिनट आराम करके फिर चलना आरम्भ कर देता है। रेखा-चित्र खींचो और यह बताओ कि वे कहाँ पर मिलेंगे ?

10. *A* और *B* को एक साथ नौकरी लगती हैं और दोनों का वेतन एक रूप से सालाना बढ़ता है। 5 साल की नौकरी के बाद उनके वेतन क्रमशः 210 रु० और 225 रु० हैं। 12 साल की नौकरी के बाद *A* का वेतन 280 रु० है तथा 20 साल के बाद *B* का वेतन 300 रु० है। रेखा-चित्र द्वारा उनके वेतन को प्रदर्शित करो तथा यह भी बतलाओ कि,

(i) उनका शुरू का वेतन क्या था ?

(ii) उनका वेतन कब बराबर था ?

(iii) 25 साल के बाद उनका वेतन क्या होगा ?

अट्ठाइस

चार अङ्कवाले लघुगणकीय सारिणी का व्यवहार
(Use of 4-figured Log Tables)

123. इस अध्याय में विद्यार्थियों को चार अङ्कवाले लघुगणकीय सारिणी के व्यवहार से अवगत कराया जायगा। चार अङ्कवाले लघुगणकीय सारिणी का हम कैसे व्यवहार करें, इस पर पूर्ण प्रकाश डाला जायगा। अतएव यह अध्याय यह मानते हुए लिखा गया है कि विद्यार्थीगण पूर्णतः लघुगणकीय सूत्रों से अवगत हैं। फिर भी इसमें लघुगणक की परिभाषा, मुख्य सूत्रों एवं मुख्य शब्दों (*terms*) पर प्रकाश डाला गया है।

124. I. परिभाषा—

यदि तीन संख्याएं a, x और m इस तरह सम्बन्धित हों कि $a^x = m$, तो a आधार पर m के लघुगणक (*Logarithm*) को x कहते हैं। यानि $\text{Log}_a m = x$

II. मुख्य सूत्र—

(i) $\text{Log}_a (mn) = \text{Log}_a m + \text{Log}_a n$

(ii) $\text{Log}_a \left(\frac{m}{n}\right) = \text{Log}_a m - \text{Log}_a n$

(iii) $\text{Log}_a m^n = \text{Log}_a m$

(iv) $\text{Log}_a m = \text{Log}_b m \times \text{Log}_a b$

(v) $\text{Log}_b a \times \text{Log}_a b = 1$

(vi) $\text{Log}_a a = 1$

(vii) $\text{Log}_a 1 = 0 \ (a \neq 0, a \neq \infty)$

(viii) $\text{Log}_a 0 = + \infty \ (a < 1)$

$= - \infty \ (a > 1)$

III. पूर्णांश (Charactistic) और दशमलवांश (Mantissa)—किसी भी संख्या के लघुगणक के दो भाग होते हैं—(1) पूर्णाङ्क का भाग और (2) भिन्न का भाग। पूर्णाङ्कवाले भाग को लघुगणक का पूर्णांश (*Characteristic*) और भिन्नवाले भाग को लघुगणक का दशमलवांश (*Mantissa*) कहते हैं। किसी संख्या का लघुगणक पूर्णांश एवं दशमलवांश का योग होता है।

पूर्णांश (Characteristic) प्राप्त करने की विधि—किसी भी संख्या के लघुगणक पूर्णांश मालूम करने के पहले यह ज्ञात कर लेना चाहिए कि संख्या एक अङ्क की है अथवा एक से अधिक अङ्क की।

अगर संख्या एक अङ्कवाली होगी तो उसका पूर्णांश हमेशा शून्य होगा। जैसे—1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, आदि संख्याओं के लघुगणकों में पूर्णांश हमेशा शून्य होगा।

यदि संख्या एक से अधिक अङ्कवाली हो और धनात्मक हो, तो उसके पूर्णांकवाले भाग में अङ्कों की संख्या गिन लो। उसमें एक घटा दो। शेष उस संख्या के लघुगणक का पूर्णांश (*Characteristic*) होगा। जैसे—12, 124, 1243·753 आदि संख्याओं के लघुगणकों के पूर्णांश क्रमश: 1, 2 और 3 हैं।

परन्तु उपर्युक्त विधि उन सभी संख्याओं के लघुगणक के पूर्णांश के लिए लागू है जो संख्या एक से बड़ी हो और धनात्मक हो।

यदि कोई धनात्मक संख्या 1 से छोटी हो, तो एसी संख्याओं के लघुगणक का पूर्णांश ऋणात्मक होता है और संख्यात्मक रूप से दशमलव बिन्दु के तुरन्त बाद के शून्यों की संख्या से एक अधिक होगा।

जैसे—·3 के लघुगणक में पूर्णांश = $-(0+1) = -1$0

.0035 के लघुगणक में पूर्णांश = $-(2+1) = -3$

और ·0000346 के लघुगणक में पूर्णांश = $-(4+1) = -5$ हैं।

नोट—लघुगणक के ऋणात्मक पूर्णांश (*Negative characteristic*) को इसके ऊपर ऋणात्मक चिन्ह (—) लगाकर लिखा जाता है। जैसे यदि किसी संख्या का लघुगणक $-3+\cdot2345$ हो, तो उसे $\overline{3}\cdot2345$ लिखा जायगा। विद्यार्थियों को लघुगणक के ऋणात्मक पूर्णांश लिखने वक्त सावधान हो जाना चाहिए कि $\overline{3}\cdot2345$ को वे कभी भी 3·2345 नहीं लिख सकते हैं। क्योंकि $\overline{3}\cdot2345 = -3+.2345 = -2\cdot7655 (\neq -3\cdot2345)$

लघुगणक के दशमलवांश (Mantissa) प्राप्त करने की विधि— 1 से लेकर 99999 तक की संख्याओं के लघुगणको के दशमलवांश की सारिणी बनी रहती है। इसे लघुगणक की सारिणी कहते हैं। दशमलवांश इसी सारिणी से देखकर लिख लिया जाता है।

नोट—उन सभी संख्याओं के लघुगणकों के दशमलवांश, जिनमें एक ही प्रकार के अङ्क हों और अङ्कों का क्रम भी एक ही हो, बराबर होते हैं।

125. लघुगणक सारिणी (Logarithmic Table) से दशमलवांश (Mantissa)—

सारिणी की सहायता से हम आसानीपूर्वक लघुगणक का दशमलवांश (*Mantissa*) मालूम कर सकते हैं। पुस्तक के अन्त में 1 से 99999

तक की विभिन्न संख्याओं के 10 आधार पर लघुगणक दशमलव के पाँच अङ्कों तक दिये गये हैं। इन सारिणियों में केवल दशमलवांश दिया हुआ है, क्योंकि किसी संख्या का पूर्णांश (*Characteristic*) सहज ही में मालूम हो जाता है।

सारिणी में दो भाग— लघुगणक सारिणी में दो भाग हैं—मुख्य भाग और मध्यक अन्तर (*Mean difference*)। मुख्य भाग द्वारा तीन या तीन से कम अङ्कों की संख्याओं के लघुगणक के दशमलवांश प्राप्त होते हैं। चौथे स्थान-वाले अङ्कों के लिए लघुगणक में जो वृद्धि होती है वह मध्यक अन्तर (*Mean difference*) सारिणी से मालूम होता है।

उदाहरण—

$$\text{Log } 5 = \text{Log } \tfrac{50}{10} = \text{Log}50 - \text{Log}10$$

$$= 1{\cdot}69897 - 1 \qquad (\because \ \text{Log } \tfrac{10}{10} = 1)$$

$$\text{Log } 504 = 2{\cdot}70243 = .69897$$

$$\text{Log } 54 = 1{\cdot}73239$$

126. लघुगणक से तीन अंकोंवाली या उससे अधिक अंकों-वाली संख्या का दशमलवांश ज्ञात करना—

1. तीन अंकोंवाली संख्या का लघुगणक प्राप्त करना— मान लो कि तुम्हें 475 का लघुगणक निकालना है। स्पष्टतः 475 के लघुगणक का पूर्णांश 2 होगा। अब इसका दशमलवांश ज्ञात करना है। इसके लिए लघुगणक सारिणी की उस पंक्ति (*Row*) पर ध्यान आकृष्ट करो जिसमें 47 लिखा हुआ है। फिर उसी पंक्ति में आगे बढ़ो (नीचे नहीं) और जिस स्तम्भ (*Column*) के मस्तक (*Top*) पर 5 लिखा हुआ है उसके नीचे उतरो। ये दोनों जहाँ कटते हैं वह Log 47·5 का दशमलव होगा। सारिणी के अनुसार Log 47·5 का दशमलवांश ·67669 है।

स्पष्टतः Log 475 का भी दशमलवांश वही होगा जो Log 47·5 का है, क्योंकि उन सभी संख्याओं के लघुगणकों का दशमलवांश, जिसमें एक ही प्रकार के अङ्क हों और अङ्कों का क्रम भी एक ही हो, बराबर होते हैं।

अतः Log 475 का दशमलवांश ·67669 हुआ।

∴ Log 475 = 2·67669

उसी प्रकार 47·5 = 1·67669

II. चार अंकोंवाली संख्या का लघुगणक प्राप्त करना—मान लो कि तुम्हें 4756 का लघुगणक निकालना हो। स्पष्टतः 4756 के लघुगणक का पूर्णांश 3 होगा। अब इसका दशमलवांश ज्ञात करना है। इसके लिए लघुगणक सारिणी की उस पंक्ति (*Row*) पर ध्यान आकृष्ट करो जिसमें 47 लिखा हुआ है। उसके आगे बढ़ो (नीचे नहीं) और जिस स्तम्भ के मस्तक (*Top*) पर 5 लिखा हुआ है उसके नीचे उतरो। ये दोनों जहाँ कटते हैं वहाँ ·67669 मिलेगा। फिर आगे उसी पंक्ति में बढ़ो और मध्यक अन्तर (*Mean difference*) के उस स्तम्भ (*Column*) में जिसके मस्तक (*Top*) पर 6 लिखा हुआ है उससे नीचे उतरो। ये दोनों जहाँ कटते हैं वहाँ 46 लिखा है। उसका अर्थ ·00046 पढ़ो। अगर लघुगणक पाँच अंकों वाली सारिणी है और अगर लघुगणक सात अंकों वाली सारिणी है तो उसे ·0000046 पढ़ो। अगर हम इसे पहले प्राप्त संख्या ·67669 में जोड़ देते हैं तो हमें 475·6 के लघुगणक का दशमलवांश मिलेगा। अब ·67669 + ·00046 = ·67715

अतः Log 475·6 = 3·67715

उसी प्रकार 475·6 = 2·67715

III. पाँच अंकोंवाली संख्या का लघुगणक प्राप्त करना—मान लो कि तुम्हें 47564 का लघुगणक निकालना है। इसके लिए सारिणी की उस पंक्ति को प्राप्त करो जिसमें 47 लिखा हुआ हो। उसके बाद उसी पंक्ति (*Row*) में आगे बढ़ो (नीचे नहीं) और जिस स्तम्भ (*Column*) के मस्तक (*Top*) पर 5

लिखा हुआ है उसके नीचे उतरो। ये दोनों जहाँ कटते हैं वहाँ ·67669 मिलेगा। यह अंक Log 475 का दशमलवांश होगा।

स्पष्टतः Log 475 का पूर्णांश 2 है।

$\therefore$ Log 475 = 2·67669

अब संख्या 47564 के चौथा अंक 6 है। इसके लिए मध्यक अन्तर (*Mean difference*) के उस स्तम्भ (*Column*) में जिसके मस्तक (*Top*) पर 6 लिखा हो और जो उस पंक्ति में पड़ता है जिसमें 47 है, उसके नीचे उतरो, ये दोनों जहाँ कटते हैं वहाँ 46 लिखा है। इस संख्या 47564 का पाँचवा अंक 4 है और मध्यक अन्तर के स्तम्भ की संगत संख्या 29 है, इसलिए,

संख्या		लघुगणक (*Logarithm*)
4 7 5		2· 6 7 6 6 9
	·6 का अन्तर	· 0 0 0 4 5
	.0 4 का अन्तर	· 0 0 0 0 3
4 7 5 ·6 4		2· 6 7 7 1 7

$\therefore$ ·6 के लिए अन्तर ·00045

$\therefore$ .4 के लिए

$$= \frac{\cdot04 \times \cdot00045}{\cdot6}$$

$$= \cdot00003$$

$\therefore$ Log 475·64 = 2·67717
$\therefore$ Log ·47564 = $\bar{4}$·67717

{ $\therefore$ 475·64 और 47564 के दशमलवांश एक ही होंगे

127. समानुपाती भागों का सिद्धान्त (Principle of Proportional Parts)—

इस सिद्धांत को समझने के लिए उदाहरण पर विचार करो।

मान लो कि

Log 736 = 2·86688

तथा Log 735 = 2·86629

अब, यदि Log $x = 2 \cdot 86655$, तो x का मान निकालना है। संख्याएं 736, 735 और x के लघुगणकों को देखने से यह ज्ञात होता है कि x का मान 735 और 736 के बीच स्थित है।

अतएव Log x = Log $(735 + m)$

स्पष्टतः x के मान को जानने के लिए m के मान को जानना होगा।

अतः m का मान प्राप्त करने के लिए नीचे दिये गये तरीके को अपनाते हैं।

$\because$ Log 736 = 2·86688

और Log 735 = 2·86629

$\therefore$ अन्तर वास्ते 1 = ·00059.... ....(i)

फिर $\because$ Log $(735 + m)$ = 2·86655

और Log 735 = 2·86629

$\therefore$ अन्तर वास्ते m = ·00026 ....(ii)

(i) और (ii) से,

$$\frac{m}{1} = \frac{\cdot 00026}{\cdot 00059} = \frac{26}{59} = \cdot 44 \text{ (करीब-करीब)}$$

$\therefore$ Log x = 2·86655 = Log (735 + ·44)

$\therefore$ x = 735·44

ऊपर के उदाहरण में x के मान निकालने के लिए जिस तरीके को अपनाया गया है उसे हम समानुपाती भागों के सिद्धांत (*Principle of proportional Parts*) कहते हैं।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. 4^{15} में अंकों की संख्या मालूम करो जब कि Log 2 = ·30103 हो।

मान लो $x = 4^{15}$

$\therefore$ $\text{Log } x = 15 \text{ Log } 4$

$= 15 \text{ Log } 2^2$

$= 30 \text{ Log } 2$

या, $\text{Log } x = 30 \times \cdot 30103$

$= 9{\cdot}03090$

चूंकि Log x का पूर्णांश 9 है; अतः x में अंकों की संख्या $9 + 1$ अर्थात् 10 होगी।

उदाहरण 2. दिया हुआ है कि $\text{Log } 2 = 3{\cdot}0103$; $\text{Log } 3 = \cdot 4771213$, तो $(\cdot 036)^{15}$ में प्रथम सार्थक अंक का स्थान मालूम करो।

मान लो कि $x = (\cdot 036)^{15}$

$\therefore$ $\text{Log } x = 15 \text{ Log } \cdot 036$

$= 15 \text{ Log} \frac{36}{1000}$

$= 15 \text{ Log} \frac{2^2 \cdot 3^2}{10^3}$

$= 15 [\text{Log } 2^2 + \text{Log } 3^2 - \text{Log } 10^3]$

$= 15[2 \text{ Log } 2 + 2 \text{ Log } 3 - 3 \text{ Log } 10]$

$= 15[2 \times \cdot 30103 + 2 \times \cdot 4771213 - 3]$ [$\because$ $\text{Log}_{10} 10 = 1$]

$= 15[1{\cdot}5563026 - 3]$

$= 23{\cdot}3445390 - 45$

$= -45 + 23 + \cdot 3445390$

$= -22\cdot + \cdot 3445390$

$= \overline{22}{\cdot}445390$

$\therefore$ शून्य की इष्ट संख्या $= 22 - 1 = 21$ होगी।

उदाहरण 3. यदि Log 2 = ·30103 और Log 7 = ·8450980 हो, तो, **Log ·0035** का मान बताइये।

$$\text{Log } \cdot 0035 = \text{Log } \frac{35}{10^4} = \text{Log } 35 - \text{Log } 10^4$$

$$= \text{Log } (7 \times 5) - 4\text{Log } 10$$
$$= \text{Log} 7 + \text{Log } 5 - 4\text{Log } 10$$
$$= \text{Log} 7 + \text{Log} 10 - \text{Log} 2 - 4$$
$$= \text{Log} 7 + \text{Log} 2 - 3$$
$$= -3 + \cdot 5440680$$
$$= \bar{3} \cdot 5440680$$

उदाहरण 4. यदि Log.4629 = $\bar{1}$ ·6654, तो

(i) Log 462·9 और

(ii) Log ·0004629 का मान बताओ।

(i) Log462·9 के पूर्णांश = 2 और दशमलवांश = ·6654

∴ Log462·9 = 2·6654

(ii) Log ·0004629 के पूर्णांश = $\bar{4}$ और

दशमलवांश = ·6654

∴ Log ·0004629 = $\bar{4}$ · 6654.

उदाहरण 5. का मान निकालो— $\sqrt[5]{23 \cdot 4}$

जबकि Log 234 = 2·3692159

और Log 187864 = 5·2738435 हो,

मान लो $x = (23 \cdot 4)^{\frac{1}{5}}$

∴ $\text{Log } x = \frac{1}{5} \text{ Log } 23 \cdot 4$

$$=\frac{1}{5}\left\{\text{Log}\,\frac{234}{10}\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\{\text{Log } 234-\text{Log } 10\}$$

$$=\frac{1}{5}\{2\cdot3692159-1\}$$

$$=\frac{1}{5}\times1\cdot3692159$$

$$=\cdot2738432$$

लेकिन दिये हुए सम्बन्ध से,

$\because$ Log 187864 = 5·2738432

$\therefore$ Log 1·87864 = ·2738432

$\therefore$ Log x = Log 1·87864

$\therefore$ x = 1·87864.

उदाहरण 6. दिया हुआ है कि Log 7 = ·8450980, Log 887904 = 5·9483600, तो ·0007 का घनमूल निकालो।

मान लो कि $x=(\cdot0007)^{\frac{1}{3}}$

$$=\frac{1}{3}\text{ Log }\frac{7}{10^4}$$

$$\frac{1}{3}=[\text{ Log } 7-4\text{ Log } 10]$$

$$=\frac{1}{3}[\cdot8450980-4]$$

$$=\frac{1}{3}[\bar{4}\cdot8450980]$$

$$=\frac{1}{3}[\bar{6}+2\cdot8450980]$$

$$=\bar{2}\cdot9483660.$$

उदाहरण 7. दिया हुआ Log 3·7683 = ·5274108 और Log 3·3682 = ·5273979, तो उस संख्या को निकालो जिसका Logarithm $\overline{2}$ ·5274023 है।

मान लो वह संख्या x है, तो

$$\text{Log } x = \overline{2}\cdot5274023$$

अब Log ·033683 = $\overline{2}$·5274108

और Log ·033682 = $\overline{2}$·5273979

तथा Log x = $\overline{2}$·5274023.

अतः x का मान ·033682 तथा ·033683 के बीच स्थित है।

∴ मान लो कि Log x = Log (·033682 + m)····(i)

Log ·033683 = $\overline{2}$·5274108

Log ·033682 = $\overline{2}$·5273979

∴ अन्तर वास्ते ·000001 = ·0000129···· ····(ii)

फिर; Log (·033682 + m) = $\overline{2}$·5274023

Log ·033682 = $\overline{2}$·5273979

∴ अन्तर वास्ते m = ·0000044···· ····(iii)

∴ (i) और (iii) से,

$$\frac{m}{\cdot000001} = \frac{44}{129}$$

$$\therefore \quad m = \frac{44}{129} \times \cdot0000021 = \cdot00000034$$

∴ Log x = Log (·033682 + ·00000034)

= Log ·03368234

∴ x = ·03368234

उदाहरण 8. यदि Log 33656 = 4·5270625 और Log 33657 = 4·5270754, तो Log 33·656208 का मान बताओ।

यहां पर Log 33656 = 4·5270625 तथा

Log 33657 = 4·5270754

∴ Log 33·657 = 1·5270754 तथा

Log 33·656 = 1·5270625

∴ अन्तर वास्ते ·002 = ·0000129

फिर 33·656208 − 33·656 = ·000208

जब ·001 का अन्तर ·0000129 है, और अगर ·0000208 का अन्तर x है, तो

$$\frac{x}{.000208} = \frac{.0000129}{.001}$$

$$\therefore \quad x = \frac{.0000129}{.001} \times .000208 = .0000026832$$

$$\therefore \quad \text{Log } 30.656208 = 1.5270625 + .0000026832$$
$$= 1.5270652$$

उदाहरण 9. यदि Log 260315 = 5·4154995, Log 2 = ·30103 Log 3 = ·4771213 और Log 7 = ·8450980 है, तो $(.00001764)^{\frac{1}{3}}$ का मान बताओ।

मान लो कि $x = (.00001764)^{\frac{1}{3}}$

$$\therefore \quad \text{Log } x = \tfrac{1}{3} \text{ Log } .00001764$$

$$= \tfrac{1}{3} \text{ Log } \frac{1764}{10^8}$$

$$= \tfrac{1}{3}\{\text{Log } (3^2 \times 7^2 \times 2^2) - 8 \text{ Log } 10\}$$

$= \frac{1}{3}[2 \text{ Log } 3 + 2 \text{ Log } 7 + 2 \text{ Log } 2 - 8]$

$= \frac{1}{3}[-8 + 3{\cdot}2464986]$

$= \frac{1}{3}[-6 + 1{\cdot}2464986]$

$= -2{\cdot}4154995$

$\therefore \quad \text{Log } x = \bar{2}{\cdot}4154995$

लेकिन $\quad \text{Log } 260315 = 5.4154995$

$\therefore \quad \text{Log } x = \text{Log } ({\cdot}0260315)$

$\therefore \quad x = {\cdot}0260315$

EXAMPLE 83

[जहाँ आवश्यकता हो निम्नलिखित मानों का प्रयोग कीजिये—Log2 = ·30100; Log 3 = ·4771213; Log 7 = ·8450980; Log11 = 1·0413927]

मान निकालो—

1. Log 375
2. Log 2·056
3. Log 17·15
4. Log 39200
5. $\text{Log } \sqrt[3]{1125}$
6. $\text{Log } \frac{.0007}{\cdot 2}$
7. अंकों की संख्या निकालो—

(i) 15^{25} (ii) 2^{64} (iii) 6^{20}

(iv) $3^{12} \times 2^{8}$ (v) $3^{15} \times 2^{10}$

8. निम्नलिखित संख्याओं में दशमलव विन्दु के तुरत बाद शून्यों की संख्या बताओ—

(i) $({\cdot}5)^{1000}$ (ii) $({\cdot}024)^{15}$

(iii) $(19)^{-10}$ (iv) $({\cdot}0035874)^{8}$

9. $\cdot 7$ का घनमूल निकालो जबकि $\text{Log} 7 = 0{\cdot}8450980$ और $\text{Log } 827904 = 5{\cdot}9483660$

10. (i) $\cdot 003$ का पाँचवा मूल निकालो, जबकि $\text{Log } 3 = \cdot 4771213$ और $\text{Log } 312936 = 5{\cdot}4954243$

(ii) $(84)^{\frac{1}{3}}$ का मान निकालो, जबकि $\text{Log } 3 = \cdot 4771213$.

11. दिया हुआ है कि $\text{Log } 4 = \cdot 60206$ और $\text{Log } 3 = \cdot 4771213$, तो

(i) $\cdot 8$ (ii) $\cdot 003$ तथा (iii) $(\cdot 00018)^{\frac{1}{7}}$ का *Logarithm* निकालो।

12. दिया हुआ कि $\text{Log } \cdot 61837 = \bar{1}{\cdot}7912484$, $\text{Log } \cdot 03457 = \bar{2}{\cdot}5387496$ तथा 1 के लिए अन्तर $= 71$, तो $(\cdot 034574)^{\frac{1}{7}}$ का मान निकालो।

13. दिया हुआ है कि $\text{Log } 2 = \cdot 3010300$ और $\text{Log } 4844544 = 6{\cdot}6852530$ तो $(8{\cdot}4)^{\frac{1}{10}} \times (\sqrt[4]{\cdot 256})^3 \div 80$ का मान बताओ।

14. (i) दिया हुआ है कि $\text{Log} 7 = \cdot 8450980$ तथा $\text{Log} 1{\cdot}320469 = \cdot 1207283$ हो, तो $7^{\frac{1}{7}}$ का मान निकालो।

(ii) दिया हुआ है कि $\text{Log } 1197{\cdot}342 = 3{\cdot}0782184$, तो $(35{\cdot}28)^{\frac{1}{7}}$ का मान निकालो।

15. दिया हुआ है कि $\text{Log } 35705 = 4{\cdot}5527290$ और $\text{Log } 35706 = 4{\cdot}5527412$, तो $\text{Log } 35705{\cdot}7$ तथा $\text{Log } 35{\cdot}70585$ का मान बताओ।

16. दिया हुआ है कि Log 8·2877 = ·9184340 और Log 8287·8 = 3·9184392, तो वह संख्या निकालो जिसका *Logarithm* $\bar{3}$·9184377 है।

128. लघुगणक का त्रिकोणमितीय श्रितो में व्यवहार (Use of Logarithm in Trigonometrical Functions)—

विद्यार्थीगण यह भली-भाँति जान चुके हैं कि त्रिकोणमितीय श्रित संख्या के बोधक हैं। अतएव धनात्मक संख्याओं के लघुगणक निकालने की भाँति ही धनात्मक त्रिकोणमितीय श्रितों के लघुगणक निकाले जा सकते हैं। साथ ही साथ विद्यार्थीगण यह भी जानते हैं कि Log 1 = 0, और एक से छोटी किसी भी संख्या का लघुगणक ऋणात्मक होता है।

अब sin तथा cosθ का मान हमेशा एक या एक से छोटा होता है।

tanθ का भी मान एक से छोटी धन संख्या होती है यदि $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ तथा

cotθ का भी मान एक से छोटी धन संख्या होगी, यदि $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

अतएव sin θ तथा cos θ के लघुगणक का पूर्णांश हमेशा शून्य तथा उनका दशमलवांश ऋणात्मक होगा। साथ ही साथ θ के उपर्युक्त मानों के लिए tanθ एवं cotθ के लघुगणकों का भी पूर्णांश शून्य तथा दशमलवांश ऋणात्मक होगा।

ऋण चिन्ह की असुविधा दूर करने के लिए तथा त्रिकोणमितीय श्रितों के लघुगणकों के दशमलवांश को धन रखने के लिए Log sinθ, Log cosθ आदि मानों में 10 जोड़ दिया जाता है। अतः 10 + Log sinθ को हम *Logarithmic* sinθ पढ़ते हैं और संक्षेप में इसे *L* sinθ से निरूपित करते हैं।

अतएव $L \sin\theta = 10 + \text{Log} \sin\theta$

$L \cos\theta = 10 + \text{Log} \cos\theta$

$L \tan\theta = 10 + \text{Log} \tan\theta$, इत्यादि ।

ध्यान रहे कि लघुगणकीय सारिणी (*Logarithmic Table*) में Log $\sin\theta$ के ऋण मान न दिये जाकर $L \sin\theta$ के धन मान दिये जायेंगे । यही व्यवस्था सभी श्रितों के लिए लघुगणकीय-सारिणी में अपनायी गयी है ।

129. प्राकृतिक सारिणी देखने की विधि—

हम $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, आदि की सारिणियों (*Tables*) को प्राकृतिक (*Natural*) सारिणियाँ कहते हैं ।

I. पहले विद्यार्थीगण $\sin\theta$ तथा $\cos\theta$ के लघुगणकीय सारिणी का अध्ययन करें ।

इस सारिणी में 0° तथा 90° के बीच सभी कोणों का *sine* तथा *cosine* का मान मिलता है ।

पहले की भाँति इस सारिणी के भी दो भाग हैं । मुख्य भाग एवं मध्यक अन्तर (*Mean difference*) वाला भाग । मुख्य भाग से 10′ के अन्तर पर *sine* तथा *cosine* के मान मिलते हैं तथा मध्यक अन्तर से 1′ के अन्तर पर सारिणी में बायीं ओर 0° से 90° तक के कोण हैं, ऊपर 0′, 10′, 20′, ...60′ हैं; दायीं ओर 1′, 2′ 3′, ...9′ के लिए मध्यक अन्तर (*Mean difference*)) हैं । किसी कोण के *sine* का मान निकालने के लिए सिरे पर लिखे गये कोणों का व्यवहार करना चाहिए तथा ऊपर से नीचे की ओर बायीं ओर से दायीं ओर चलना चाहिए । परन्तु किसी कोण के *cosine* का मान किनालने के लिए नीचे से ऊपर की ओर और दायीं ओर बायीं ओर चलना चाहिए ।

फिर हम जानते हैं कि 0° और 90° के बीच जैसे-जैसे कोण बढ़ता है, *sine* के मान में बढ़ती होती है, इसलिए मध्यक अन्तर वाली सारिणी से प्राप्त संख्या जोड़ी जायगी। परन्तु *cosine* की दिशा में जैसे-जैसे कोण 0° से 90° की ओर बढ़ता है, वैसे-वैसे *cosine* का मान घटता जाता है। फलस्वरूप कोण के *cosine* की दिशा में मध्यक अन्तरवाली सारिणी से प्राप्त संख्या घटायी जायगी।

जैसे, $\sin 42^\circ 10' = \cdot 67129$

और $\sin 42^\circ 16' = \cdot 67129 + \cdot 00129 = \cdot 67258$

फिर $\cos 47^\circ 20' = \cdot 73531$

और $\cos 47^\circ 24' = \cdot 73531 - \cdot 00078 = \cdot 73453$

II. फिर सारिणी की मदद से सभी कोणों के प्राकृतिक (*Natural tangent* तथा *cotangent* का मान 0° तथा 90° का बीच मिलता है। इसका प्रयोग सभी कोणों के *sine* तथा *cosine* का सारिणियों के समान ही करना चाहिए। *sine* के समान ही *tangent* की अवस्था में 1′ का अन्तर जोड़ा जाता है और *cosine* के समान ही *cotangent* में 1′ का अन्तर घटाया जाता है।

जैसे, $\tan 35^\circ 10' = \cdot 70455$

और $\tan 35^\circ 16' = \cdot 70455 + \cdot 00263 = 70718$

फिर $\cot 78^\circ 10' = \cdot 20952$

और $\cot 78^\circ 14' = \cdot 20952 - \cdot 00121 = 20831$

III. $L \sin\theta$, $L \cos\theta$, $L \tan\theta$, तथा $L \cot\theta$ का मान सारिणी की मदद से प्राप्त करना।

हमलोग देख चुके है $L \sin\theta = 10 + \text{Log} \sin\theta$, तथा

$L \cos\theta = 10 + \text{Log} \cos\theta$ इत्यादि।

इस तालिका (*Table*) से 0° तथा 90° के बीच $1'$ के अन्तर का मान प्राप्त होते हैं।

हम जानते हैं कि जैसे-जैसे कोण θ बढ़ता है वैसे-वैसे $\sin\theta$ बढ़ता है और $\cos\theta$ घटता है। फलस्वरूप θ के बढ़ने से $\text{Log} \sin\theta$ बढ़ेगा और साथ ही $L \sin\theta$ भी बढ़ेगा लेकिन $L \cos\theta$, $\text{Log} \cos\theta$ के साथ घटेगा। उसी प्रकार $L \tan\theta$, $\text{Log} \tan\theta$ के साथ बढ़ेगा परन्तु $L \cot\theta$, $\text{Log} \cot\theta$ के साथ घटेगा।

मान लो कि (i) $L\sin 60^\circ 17'$ और (ii) $L\cos 35^\circ 15'$ का मान निकालना है।

सारिणी से, $L\sin 60^\circ 10' = \bar{2}\cdot 93826$

अन्तर वास्ते $7' = \cdot 00050$ (मध्यक अन्तरवाले स्तम्भ से)

$\therefore$ $L\sin 60^\circ 17' = 9\cdot 93876$ (ज़ोड़)

(ii) फिर सारिणी से

$L\cos 35^\circ 10' = 9\cdot 91248$

और अन्तर वास्ते $5' = \cdot 00045$ (मध्यक अन्तरवाले अस्तम्भ से).

$L\cos 35^\circ 15' = 9\cdot 91203$ (घटाव)

लघुगणकीय व्यवहार निम्नलिखित साधित प्रश्नों से स्पष्ट होगा।

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $\sin 24^\circ 40' = 0\cdot 4173$ और $\sin 24^\circ 10' = 0\cdot 4200$ हो, तो $\sin 24^\circ 43'$ का मान निकालो।

यहाँ $\sin 24^\circ 50' = 0\cdot 4200$ एवं

$\sin 24^\circ 40' = 0\cdot 4173$

$\therefore$ अन्तर वास्ते $10' = \cdot 0027$

$\because$ कोण में 10′ की वृद्धि होने पर उसके लघुगणक में वृद्धि $= \cdot 0027$

$\therefore$ „ 3′ „ „ „ $= \dfrac{\cdot 0027 \times 3}{10}$

$= \cdot 00081$

$\therefore \quad \sin\ 24^\circ 43' = 0\cdot 4173 + \cdot 0008$

$= 0\cdot 4181$ (केवल चार दशमलव स्थान तक लेने पर)

उदाहरण 2. यदि $L\sin\ 56^\circ 19' = 9\cdot 9201896$ और $L\sin\theta = 9\cdot 9201496$ अन्तर वास्ते $1' = \cdot 0000842$ (or 842 लिख सकते हैं); तो θ का मान बताओ।

स्पष्टतः $L\sin\theta$, $L\sin 56^\circ 19'$ से छोटा है।

$\therefore$ θ अवश्य ही $56^\circ 19'$ से छोटा होगा।

अतः $\theta = 56^\circ 19' - x''$ (मान लो)

अब $L\ \sin 56^\circ 19' = 9\cdot 9201896$

$L\ \sin\ \{56^\circ 19' - x''\} = 9\cdot 9201496$

$\therefore$ अन्तर वास्ते $x'' = \cdot 0000400$

और अन्तर वास्ते $1' = 60'' = \cdot 0000842$

$$\therefore \quad \frac{x}{60} = \frac{400}{842}$$

$$\therefore \quad x = \frac{400 \times 60}{842} = 28\cdot 5''$$

$$\therefore \quad \theta = 56^\circ 19' - 28\cdot 5'' = 56^\circ 18'\ 31\cdot 5''$$

उदाहरण 3. यदि $\cos 64^\circ 20' = 4331'$ और $\cos 64^\circ 30' = 0\cdot 4305$, तो $\cos 64^\circ 26'$ का मान मालूम करो।

यहाँ, $\cos 64°20' = 0{\cdot}4331$

और $\cos 64°30' = 0{\cdot}4305$

$\therefore$ अन्तर वास्ते $10' = {\cdot}0026$

$\therefore$ अन्तर वास्ते $6' = \frac{{\cdot}0026 \times 6}{10} = {\cdot}0016$ (केवल चार दशमलव स्थान तक)

$\therefore$ $\cos 64°26' = 0{\cdot}4331 - 0{\cdot}0016 = 0{\cdot}4315.$

उदाहरण 4. दिया हुआ है $L\cos 27°53' = 9{\cdot}6464040$ $L\cos 27°54' = 9{\cdot}9463371$ और $L\cos\theta = 9{\cdot}9463775$, तो θ निकालो ।

अब, $L \cos 27°53' = 9{\cdot}9464040$

$L \cos 27°54' = 9{\cdot}9463371$

$\therefore$ अन्तर वास्ते $1' = {\cdot}0000669$..... ....(1)

आकड़े से स्पष्ट है कि θ का मान $27°53'$ से ज्यादा और $27°54'$ से कम होगा ।

अतः $\theta = 27°53'\ x''$ (मान लो).... ...(2)

फिर $L\cos 27°53' = 9{\cdot}9464040$

$L \cos 27°53'\ x'' = 9{\cdot}9463775$

$\therefore$ अन्तर वास्ते $x'' = {\cdot}0000265$

$\therefore$ $\frac{x}{60} = \frac{265}{669}$

$\therefore$ $x = \frac{265}{669} \times 60 = 23.7''$

$\therefore$ $\theta = 27°53'\ 23{\cdot}7''$

EXAMPLE 84.

1. दिया हुआ है कि $\sin 43^\circ 23' = \cdot 6868761$ और $\sin 43^\circ 24' = \cdot 6870175$, तो $\sin 43^\circ 22' 47''$ का मान बताओ।

2. दिया हुआ है कि $\cos 32^\circ 16' = \cdot 8455726$ और $\cos 32^\circ 17' = \cdot 8454172$ तो $\cos 32^\circ 16' 24''$ तथा $\cos 32^\circ 16' 47''$ के मान बताओ।

3. दिया हुआ है कि $L\cos 27^\circ 53' = 9 \cdot 9464040$, $L\cos 28^\circ 54' = 9 \cdot 9463371$ और $L\cos\theta = 9 \cdot 9463775$ तो θ का मान निकालो

4. दिया हुआ है कि $L\cos 55^\circ 31' = 9 \cdot 7529442$, $L\cos 55^\circ 30' = 9 \cdot 7531380$, तो $L\cos 55^\circ 30' 24''$ का मान निकालो।

5. दिया हुआ है कि $L\tan 12^\circ 39' = 9 \cdot 3516968$, $L\tan\theta = 9 \cdot 3520135$, अन्तर वास्ते $1'$ या $60'' = 5901$ तो θ निकालो।

6. दिया हुआ है $L\mathrm{cosec} 32^\circ 21'' = 10 \cdot 271'5733$ और $L\mathrm{cosec}\ 32^\circ 22' = 10 \cdot 2713740$, तो $L\mathrm{cosec} 32^\circ 21' 51''$ का मान निकालो।

7. दिया हुआ है कि $L\sin 14^\circ 6' = 9 \cdot 3867040$, तो $L\mathrm{cosec} 14^\circ 6''$ का मान निकालो।

8. दिया हुआ है कि $L\sec 18^\circ 27' = 10 \cdot 0229168$ और $L\sec 18^\circ 28' = 10 \cdot 0229590$, तो $L\sec 1^\circ 827' 35''$ का मान निकालो।

9. दिया हुआ है कि $L\tan 14^\circ 20' = 9 \cdot 407489$ और $L\tan 14^\circ 21'' = 9 \cdot 4079453$, तो $L\tan\ 14^\circ 20' 35''$ एवं $L\cot 14^\circ 20' 35''$ का मान निकालो।

10. दिया हुआ है कि cosec $13^{\circ}8' = 4{\cdot}4010616$ और coses $13^{\circ}9' = 4{\cdot}3955817$ तो cosec$13^{\circ}8'$ $19''$ तथा cosec$13^{\circ}8'$ $37''$ का मान निकालो ।

11. दिया हुआ है कि tan $38^{\circ}25' = {\cdot}7930640$ और tan $38^{\circ}24' = {\cdot}7925902$, तो tan $38^{\circ}24'$ $37{\cdot}5''$ का मान निकालो ।

12. दिया हुआ कि $L\sin$ $56^{\circ}47' = 9{\cdot}9225205$, $L\sin$ $56^{\circ}48' = 9{\cdot}9226032$ तथा $L\sin\theta = 9{\cdot}9225490$, तो θ निकालो ।

13. सिद्ध करो कि $L\tan\theta = L\sin\theta - \text{Log } \cos\theta$

14. यदि $L\cot$ $53^{\circ}13' = 9{\cdot}8736937$ और $L\cot$ $53^{\circ}14' = 9{\cdot}8734302$ हो, तो θ का मान निकालो जबकि $L\cot\theta = 9{\cdot}873452$

15. दिया हुआ है कि Lcosec $40^{\circ}46' = 10{\cdot}1911808$ तथा $1'$ के लिए अन्तर $= 3313$, तो Lcosec $40^{\circ}46'$ $7{\cdot}5''$ का मान निकालो ।

16. दिया हुआ है कि Lcosec $42^{\circ}46' = 10{\cdot}1681211$ और Lcosec $42^{\circ}47' = 10{\cdot}1679845$ तो Lcosec $42^{\circ}46'15''$ का मान निकालो ।

Example 10.

1. $24ab$ 2. a^2bc 3. $2a^3b^3$ 4. $15a^2b^2$ 5. $60a^5c^5$ 6. $35m^4n^4$ 7. $120a^4b^2c^2$ 8. $60a^7b^4c^4$ 9. $24x^4y^4z^4$ 10. $x^6y^6z^3$ 11. $4a^{17}b^9$ 12. $-70x^{16}y^{12}$ 13. $48a^{11}b^{10}e^7$ 14. $4a^{11}b^7$

Example 11

1. $10abc+15b^3c-20bc^3$ 2. $5a^2+10ab$ 3. x^2y+2xy^2 4. $-3a^2b^2c+3a^2bc^2-3ab^2c^2$ 5. $8a^3b-6a^2b^2+2ab^3$ 6. $-6x^2y^2+8xy^3-10x^3y^4$ 7. $-6x^5y^2+9x^4y^3+15x^3y^2$ 8. $-3x^3y^2+6x^2y^3+3xy^4$ 9. $21a^2b^4-7ab^4-35a^3b^3+7a^2b^3$ 10. $-8x^4y+12x^3y^2-20x^2y^3$ 11. a^2+22a 12. $9a^2b^2+9b^4$ 13. $5a^4-24a^3+6a^2+4a$ 14. $5bx^2$ 15. $7x^4-2x^2$ 16. $-8b^2xy$ 17. 0 18. $9a^6-25b^4$ 19. $a^3+b^3+c^3-3abc$ 20. $a^2-b^2+c^2+2ab+2bc-2ca$ 21. $x^3+y^3+2^3-3xyz$ 22. 0

Example 12

1. $a^2+ab+bc+ca$ 2. $ca-bc+ab-a^2$ 3. $ca-bc-ab-a^2$ 4. $a^2-ab-bc+ca$ 5. $4a^2-9b^2$ 6. $9a^2-25b^2$ 7. $a^2-b^2+c^2+2ca$ 8. $a^2+b^2-c^2+2ab$ 9. a^3-b^3 10. $a^2b^2-b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc$ 11. a^3+b^3 12. $a^3+b^3+c^3-3abc$ 13. a^3+b^2+ab 14. 0 15. $3a^2-b^2+c^2-2bc$ 16. $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$ 17. a^3+c^3 18. $11a+31$

Example 13

1. x^4-y^4 2. $x^{12}-y^{12}$ 3. x^6-y^6 4. x^4-16a^4 5. $x^8-47x^4y^4+y^8$ 6. a^8-b^8 7. $x^{16}-y^{16}$ 8. $2x^2-2x+18$ 9. $x^2+7x+20$ 10. $6x^2+36x+54$ 11. $a^2-b^2-2ab+bc-ca$ 12. $-2xy^2$ 13. $x^{16}+x^8+1$ 14. x^8-256y^8 15. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

Example 14

1. $6x^4$ 2 $-5a^2$ 3. 4 4. $-4x^3y^2z$ 5. $-4x^3y$ 6. $-3xy^4z^2$ 7. $-12x^3y^3z^3$ 8 $-4a^3b^5$ 9. $-4a^6y^4z^3$ 10. $-18a^{20}y^{70}$ 11. $-4xyz^2$ 12 $-8x^2y^2z^2$ 13. $a^2b^2c^2$ 14. $-3ab^2$ 15 $-5a^3b^2$ 16. $-25m^4n^5p^6$ 17 $7x^4y^9z^{10}$ 18 $-15a^9b^{15}c^{13}$ 19. $-10a^9b^{12}$ 20. $5x^6y^6z^6$.

Example 15.

1. $8a^2-5ab^2+3b$ 2. $2xy^2+3x^2y^3-4x^3y^4$; 3. $2ab-5a^5+3a^3b^2$ 4. $b+c$ 5. $2x-y$ 6. $-2x^2y^2+3x^5y^3$ 7. $2x^4y^4-3x^3y$ 8. $4a^2c^2-7ab^2+9b^3c^5$ 9. $5ab^2-8a^3b^3c^3+9a^4b^4c^5$ 10. $12x^3-10x+1$ 11. $-6ab+4a^2b^2+2a^3b^3$ 12. $2a^3-a^2+3a+1$ 13. $-n^2-3mn+4m^2$ 14. $5m^4n^2-7m^2n^4-8p^6$ 15. $b^2c^2x^2y^2-a^2c^2y^2z^2+3a^2b^2x^2z^2$.

Example 16.

1. $2x-1$ 2. $x-2$ 3. $x+y$ 4. $a+b$ 5. $a+b+c$ 6. $x+4$ 7. $x-1$ 8. $x+5$ 9. $3x^2-2x+7$ 10. $3bc^4d^2+5a^2b^3c^2d-2ac$ 11. $x^2-4xy+4y^2$ 12. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 13. $x^2+y^2+z^2+xy-x+y$ 14. $a^2+b^2-ab-2a+b+1$ 15. $\frac{x}{2}+\frac{2}{3}y$ 16. $x^2+4y^2+z^2+2yz+zx-2xy$ 17. 6 18. -2 19. -2 20. 9.

Exrmple 17.

1. a^2+4a+4 2. $9x^2+12x+4$ 3. $9x^2+12xy+4y^2$ 4. $4m^2+12mn+9n^2$ 5. $a^2b^2+2abcd+c^2d^2$ 6. $x^4+2x^2y^2+y^4$ 7. $x^2+\frac{1}{x^2}+2$. 8. $x^4+\frac{1}{x^4}+2$ 9. $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$ 10. $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$ 11. a^2+

$b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2ca+2bd+2cd+2ad$ 12. $a^2b^2+a^2c^2+c^2d^2+b^2c^2+2a^2bc+2abcd+2ab^2c+2ac^2d+2abc^2+2bc^2d$ 13. $16m^2+9n^2+9p^2+4q^2+24mn+18np+24mp+12nq+12pq+16mq$ 14. $4a^2$ 15. $36x^2$ 16. $4x^2$ 17. $36a^2$ 18. $64a^2$ 19. 4 20. 0 21. 4900 22. 4624 23. 1 24. 0. 25. 9 26. 9409 27. 16900 28. 25 29. 16 30. 10 31. 9·8 32. 800

Example 18.

1. $a^2-2ab+b^2$ 2. x^2-6x+9 3. $4a^2-12ab+9b^2$ 4. $16-24x+9x^2$ 5. $x^2y^2-4xy+4$ 6. $a^2+2ab+b^2$ 7. $4m^2-12mn+9n^2$ 8. $4a^4-12a^2b^2+9b^4$ 9. $a^2+\frac{1}{a^2}-2$ 10. $x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}-2$ 11. $a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc-4ca$ 12. $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2ca+2bc-2ad+2bd+2cd$. 13. $5x^2-8xy+5y^2$ 14. $8x^2+18y^2+32z^2-24xy$ 15. $2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+4ca-4bc+4bd-4cd$ 16. $64y^2$ 17. $4b^2$ 18. $4c^2z^2$ 19. 1 20. 144 21. 256 22. 484 23. 224 24. 25 25. 121 26. 100 27. 0 28. 64 29. 10000 30. 273529 31. 144 32. 192721 33. 1173

Example 19.

1. 2 2. 29 3. 25 4. 16 5. 4 6. 97; 36 7. 153; 36 8. 260 9. 5 10. (i) $(x+y)^2-(x-y)^2$ (ii) $\frac{1}{4}\{(a+b)^2-(a-b)^2\}$ (iii) $(x+2)^2-1^2$ (iv) $(x+3)^2-1^2$ (v) $\frac{1}{4}\{(2x+9)^2-1^2\}$ (vi) $25(x+y)^2-4(x-4)^2$ (vii) $\frac{1}{4}\{(7a-b)^2-(a-7b)^2\}$ (viii) $9(x+y)^2-(x-y)^2$ (ix) $\left(\frac{x^2+5x+8}{2}\right)^2-$

$\left(\frac{x^2+3x-2}{2}\right)^2$ or $\left(\frac{x^2+7x+8}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2+5x+2}{2}\right)^2$ or $\left(\frac{x^2+9x+16}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2+7x+14}{2}\right)^2$ (x) $\left(\frac{x^2+11x+30}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2+9x+12}{2}\right)^2$ or $\left(\frac{x^2+13x+34}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2+11x+20}{2}\right)^2$ or $\left(\frac{x^2+17x+66}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2+15x+60}{2}\right)^2$ (xi) $\left(\frac{x^2+8x+15}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2+6x+9}{2}\right)^2$ or $\left(\frac{x^2+7x+13}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2+5x+5}{2}\right)^2$ (xii) $\left(\frac{x^2+6x+9}{2}\right)^2 - 1^2$ **11.** (i) $(x+y)^2$ (ii) $(5x+12y)^2$ **12.** (i) $(a+b)^2+(2a+3b)^2$ (ii) $(a+b)^2+(3a+2b)^2$ (iii) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2$ **13.** (i) 29 (ii) 73 (iii) 77 (vi) 135 **14.** (i) 11 (ii) 14 (iii) 7 (iv) 30 **15.** 9 **16.** (i) 6 (ii) 24 **17.** (i) 46 (ii) 582 **18.** 144 **19.** $(a+b+c)^2$

Example 20.

1. $9x^2-25$ **2.** $64x^2-9y^2$ **3.** $a^2b^2-c^2d^2$ **4.** $x^2y^2-9z^4$ **5.** $a^2-b^2+c^2+2ca$ **6.** $a^2b^2c^2-x^2y^2z^2$ **7.** $a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2-2bcyz$ **8.** $x^4-y^4+z^2+2z^2x^2$ **9.** x^4+x^2+1 **10.** $x^2+y^2-z^2+2xy+2x+2y$. **11.** x^4-1 **12.** x^4-81 **13.** $16x^4-81y^4$ **14.** x^8-256y^8 **15.** x^8+x^4+1 **16.** $a^8+a^4b^4+b^8$ **17.** $x^8-2x^6+x^4-4x^3-1$ **18.** $2a^2b^2-2b^2c^2+4b^2c^2-a^4-b^4-c^4$ **19.** $2x^2+2y^2+2x^2y^2-x^4-y^4-1$ **20.** $21(x+y)(x-y)$ **21.** $8(x+y)(3x+y)$ **22.** $4ab(a^2+b^2)$ **23.** $4(x+y)z$ **24.** 281151 **25.** 1269 **26.** 1647 **27.** .009 **28.** $9(2a+3b)(2a-3b)$ **29.** $(11a+7b)(11-7b)$ **30.** $(5a-b)(a+9b)$

31. $(x+y+z)(3x+5y+7z)$ 32. $(a-b+x-y)(a-b-x+y)$ 33. $(5x-2y)(x+12y)$ 34. $(b-2c)(2a+3b-4c)$ 35 $(2m+5n-2p)(2m+n-8p)$ 36. $(5x+y+12z)(x+7y+2z)$ 37. $8(a+b)(a-3c)$ 38. $(2x^2+4xy+3y^2)(2x^2-4xy+3y^2)$ 39. $16(a^2b^2+2)(a^2b^2-2)$ 40. $(6x+5y-5z))6x-5y+5z)$

Example 21.

1. $x^3+9x^2+27x+27$ 2. $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$ 3. $64x^3+144x^2y+108xy^2+27y^3$ 4. $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3c^2a+3b^2c+3bc^2+3ab^2+3c^2a+6abc$ 5 $x^3+3x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}$ 6. $a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3+3a^2bx^2y+3ca^2zx^2+3ab^2xy^2+3ac^2xz^2+3b^2cy^2z+3bc^2yz^2+6abcxyz$ 7. $a^3-b^3-c^3-3a^2b+3ab^2-3a^2c+3ac^2-3b^2c-3bc^2+6abc$ 8 $a^6b^3+3a^4b^2c^2d+3a^2bc^4d^2+c^6d^3$ 9. $64x^3$ 10. $512a^3$ 11. $125m^3$ 12. $27b^3$ 13. $(x+1)^3$ 14. $8a^3$ 15. 54 16. 91 17. 28 18 343 19. 27 22. 198 25. 110 26. 1000 27. 730 28. (i) 343 (ii) 0 (iii) 0 29. 95 30. 92 31. 52.

Example 22.

1. $1-3a+3a^2-a^3$ 2. $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$ 3. $27a-27m^3+9a-1$ 4. $27m^3-135mn^2+225mn^2-125n^3$ 5. $64a^3-144a^2b+108ab^2-27b^3$ 6. $a^6+b^6+c^6+3a^4b^2+3a^4c^2+3a^2b^4+3a^2c^4+3b^4c^2+3b^2c^4+a^2b^2c^2$ 7. $a^3-b^3-c^3-3a^2b+3ab^2-3a^2c+3bc^2-3b^2c-3bc^2+6abc$ 8. $27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3$ 9. $216y^3$ 10. $100b^3$ 11. $8x^3$ 12. $(x-y)^3$ 13. $64y^3$ 14. $8y^3$ 15. 64 16. 8 17. 64 18. 27 19. 27 20. 18 24. 88 25. 427 26. 632 27. 270 28. 140 29. 8 30. 216

Example 23

1. x^3+216 2. $8x^3+1$ 3. a^6+1 4. $27x^3+125y^3$ 5. m^6+n^6 6 $27a^3b^3+c^3$ 7. $(3a+4)(9a^2-12a+16)$ 8. $(2a+5)(4a^2-10a+25)$ 9. $(4ab+2c)(16a^2b^2-8abc+4c^2)$ 10. $(a^2+b^3)(a^4-a^2b^3+b^6$ 11. $8(a+2b^2)(a^2-2ab^2+4b^4)$ 12. $(3a^2b^2+2c)(9a^4b^4-6a^2b^2c+4c^2)$ 13. $(ab^3c+5)(a^2b^6c^2-5ab^3c+25)$ 14. $(3+7abc)(9-21abc+49a^2b^2c^2)$ 15. $8(2a+3xy^2z)(4a^2-6axy^2z+9)$ 16. $(6ab+c)(36a^2b^2-6abc+c^2)$ 17. $(3xy+4ab)(9x^2y^2-12xyab+16a^2b^2)$ 18. $(9abc+10xyz)(81a^2b^2c^2-90abcxyz+100x^2y^2z^2)$ 19. $(11ab^2x^3+9cy^2z^3)(121a^2b^4x^6-99ab^2cx^3y^2z^3+81c^2y^4z^6)$ 20. $8(x+2y)(x^2-3xy+6y^2)$

Example 24

1. $1-64x^3$ 2. $125x^3-1$ 3. $8m^3-27n^3$ 4. $a^3b^3-8c^3$ 5. $x^3y^3z^3-27$ 6. a^6-1 7. $(3-4x)(9+12x+16x^2)$ 8. $(5-xyz)(25+5xyz+x^2y^2z^2)$ 9. $(4x-5y^2z)(16x^2+20xy^2z+25y^4z^2)$ 10. $(1-3ab^2c)(1+3ab^2c+9a^2b^4c^2)$ 11. $(3x-7abc)9x^2+21xabc+49a^2b^2c^2)$ 12. $8(5-4xyz)(25+20xyz+16)$ 13. $(2-5ab^2c^3)(4+10ab^2c^3+25a^2b^4c^6)$ 14. $(5xy-6z)(25x^2y^2+30xyz+36z^2)$ 15. $(5ab-c)(25a^2b^2+5abc+c^2)$ 16. $(7x-2yz)(49x^2+14xyz+4y^2z^2)$ 17. $(6k-5l)(36k^2+30kl+25l^2)$ 18. $(3abc-2xyz)(9a^2b^2c^2+6abcxyz+4x^2y^2z^2)$ 19. $(1-8k)(1+8k+64k^2)$ 20. $(9m-4np)(81m^2+36mnp+16n^2p^2)$

Example 25

1. $x^2+10x+21$ 2. $x^2-15x+56$ 3. x^2+x-90 4. $m^2x^2+3mx-28$ 5. $x^4-2x^3+9x^2-14x+49$ 6. $x^3-3x-70$ 7. $x^4-x^3+6x^2-9x+81$ 8. $4x^2+94^2+12xy+16x+21y$

15 9. $x^4-8x^3+21x^2-24x+9$ 10. $4x^4-4x^3-4x^2-10x+25$ 11. $a^4\div a^3-24a^2+3a+9$ 12. $4x^4-2x^3-57x^2+6x+81$ 13. $x^6-25x^5+6x^4+70x^3-35x^2+49$ 14. $4x^6+4x^5+x^4+18x^3+81x^2$ 15. $16a^4-8a^3-103a^2+10a+25$

Example 26

1. $x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x+a_1a_2a_3$
2. $x^3+6x^2+11x+6$ 3. x^3+2x^2-5x-6 4. $x^3-6x^2+11x-6$
5. $x^3-3x^2-10x+24$ 6. $x^3-18x^2+101x-168$ 7. $a^3-\frac{7}{4}a^2+\frac{7}{8}a-\frac{1}{8}$ 8. $a^3-(x+y+z)a^2+(xy+yz+zx)a-xyz$ 9. $8a^3+32a^2+38a+12$ 10. $64a^3-240a^2+289a-105$ 11. $a^3x^3+(m+n+p)a^2x^2+(mn+mp)ax+mnp$ 12. $a^3+b^3+3a^2+3ab^2+a^2+b^2+2ab-10a-10b+8$ 13. $x^3+y^3-3x^2y+3xy^2-7x+7y+6$ 14. $x^3y^3+3x^2y+3xy^2-7x-7y+6$ 15. $x^3y^3+6z^3+3x^2y+3xy^2+6x^2z+6y^2z+11xz^2+11yz^2+12xyz$
16. $8x^3+y^3+6z^3+12x^2y+6xy^2+24x^2z+6y^2z+22xz^2+11yz^2+24xyz$

Example 27

1. $4a^2+20ay+25y^2=(2a+5y)^2$ 2. $9x^2+4xa+\frac{4}{9}a^2=(3x+\frac{2}{3}a)^2$ 3. $9x^2+42xy+49y^2=(3x+7y)^2$ 4. $16a^2-56ab+49b^2=(4a-7b)^2$ 5. $\frac{9}{4}a^2-2ax+\frac{4}{9}x^2=(\frac{3}{2}a-\frac{2}{3}x)^2$ 6. $\frac{4}{25}x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{25}{36}y^2=(\frac{2}{5}x-\frac{5}{6}y)^2$ 7. $(14a-3b)^2=(4a)^2-24ab+(3b)^2$ 8. $(3a+5b)^2=(3a)^2+30ab+25b^2$ 9. $4a^2+28ab+(7b)^2=(2a+7b)^2$ 10. $9a^2-15ab+(\frac{5}{2}b)^2=(3a-\frac{5}{2}b)^2$ 11. $x^2-4x+(2)^2=(x-2)^2$ 12. $81x^2-18x+1^2=(9x-1)^2$ 13. $(\frac{7}{6}a)^2+7ax+9x^2=(\frac{7}{6}a+3x)^2$ 14. $(\frac{5}{4}x)^2-5xy+4y^2=(\frac{5}{4}x-2y)^2$

15. $x^2 - 14ax + 49a^2 = (x - 7a)^2$ 16. $(5a + 3b)^2 = (5a)^2 + 30ab + (3b)^2$ 17. $(7a - 5x)^2 = 49a^2 - 70ax + (5x)^2$ 18. $(3x - 8^2 = (3x)^2 - 48x + 64$ 19. $(5x - 7y)^1 = (5x)^2 - 70xy + (7y)^2$

20. $(6y)^2 - 8xy + \frac{4}{9}x^2 = (6y - \frac{4}{9}x)^2$ 21. $49x^2 - 7ax + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = \left(7x - \frac{y}{z}\right)^2$ 22. $64x^2 - 4ax + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \left(8x - \frac{y}{4}\right)^2$

23. $(\frac{7}{6}p)^2 + 7bp + 9b^2 = (\frac{7}{6}p + 3b)^2$ 24. $9x^2 - 7xy + (\frac{7}{6}y)^2 = (3x - \frac{7}{6}y)^2$ 25. $4x^2 + xp + \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \left(2x + \frac{p}{4}\right)$

Example 28

1. $(2x^2 + 1)(2x^2 - 1)$ 2. $(2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$ 3. $(x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})(x^2 + 8)$ 4. $(2a + 5b)(2a - 5b)$ 5. $(x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8)$ 6. $(2\sqrt{2x} + 1)(2\sqrt{2x} - 1)(8x^2 + 1)$ 7. $(8x^2 + 4x + 1)(8x^2 - 4x + 1)$ 8. $(a + \sqrt{2ab} - b)(a - \sqrt{2ab} - b)$ 9. $(x^2 + 3xy - 3y^2)(x^2 - 3xy - 3y^2)$ 10. $(x + 2)(x - 3)$ 11. $(x^2 + xa + a^2)(x^2 - xa + a^2)$ 12. $(x^2 + 5ax + a^2)(x^2 - 5ax^2 + a^2)$ 13. $(a + b)(2a + b)(2a^3 - 3ab + b^2)$ 14. $(2a^2 + 3ab - b^2)(2a^2 - 3ab - b^2)$ 15. $(x^4 + 5a^2x^2 - a^8)(x^4 - 5a^2x^2 - a^8)$ 16. $(3x^2 + 2xy + 2y^2)(3x^2 - 2xy + 2y^2)$ 17. $(x + 1)(x - 2)$ 18. $(x + 1)(x - 3)$ 19. $(x - 3)(x + 4)$ 20. $(x + 1)(x + 4)$ 21. $(x + 2)(x + 5)$ 22. $(x - 2)(x + 3)$ 23. $3(x - 2)(3x + 2)$ 24. $3(x + 3)(3x - 1)$ 25. $(3x^2 - 1)(3x^2 + 4)$ 26. $3(x^2 - 1)(3x^2 - \frac{4}{3})$ 27. $(3x^2 - 1)(3x^2 - 4)$ 28. $3(x^2 - 1)(3x^2 - \frac{16}{3})$ 29. $(3x^2 + 2xy - 2y^2)(3x^2 - 2xy - 2y^2)$ 30. $(x^4 - x^2y + 3y^2)(x^4 - x^2y + 3y^2)$

Example 29

1. $a^2(a + b)$ 2. $x(x + y)$ 3. $a^2(3 + a^4)$ 4. $7x(1 + x)(1 - x)$

5. $(x+z)(y-w)$ 6. $(a+b)(a+c)$ 7. $a^3(1+3ab)$ 8. $4b(a-2c)$ 9. $7a^3b^3(5b^3-9a^7)$ 10. $a(a+b+c)$ 11. $a^2(a-b-c)$ 12. $(a-b)(a-c)$ 13. $(x+a)(b-c)$ 14. $(x+3)(x+y)$ 15. $(y+2)(x+y)$ 16. $(x+5)(x-a)$ 17. $(ax+by)(bx+ay)$ 18. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ 19. $a(a+b)(a-1)$ 20. $(a-b)(a-3)$ 21. $(a-1)(a^2+1)$ 22. $(a+b+c)(x+1)$ 23. $(a+b)(a+b+2)$ 24. $(x+y)(x+y-1)$ 25. $(x^3+1)\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$ 26. $(x+1)(x^2+1)$ 27. $x^2(x+1)(x^2+1)$ 28. $(x+1)(x+2)(2x+1)$ 29. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ 30. $(1+a)(1+b)(1+c)$ 31. $(x^2+1)\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)$ 32. $\frac{(x^2+1)(x^4+1)(x^6+1)}{x^6}$

Example 30

1. $(3a+4b)(3a-4b)$ 2. $a(2a+5x)(2a-5x)$ 3. $(2x+1)(2x-1)(4x^2+1)$ 4. $(\sqrt{6}x+1)(\sqrt{6}x-1)(6x^2+1)$ 5. $(ab+4)(ab-4)$ 6. $a(a+3b)(a-3b)$ 7. $(5x+4y)(5x-4y)$ 8. $(x+1)(x-1)(x^2+1)$ 9. $(a+3b)(a-3b)(a^2+9b^2)$ 10. $(ax+by)(ax-by)$ 11. $(1+2x)(1-2x)(1+4x^2)$ 12. $x^2(1+3x)(1-3x)(1+9x^2)$ 13. $(6+x^2a)(6-x^2a)$ 14. $(8a^2+7x^3)(8a^2-7x^3)$ 15. $(ab-5cd)(ab+5cd)$ 16. $x^{10}(9x+8)(9x-8)$ 17. $p^2(q-\sqrt{10})(\sqrt{q}+\sqrt{10})(q^2+10)$ 18. $x^3(8x^2+5a)(8x^2-5a)$ 19. $3a^5(2\sqrt{2a}+3x)(2\sqrt{2a}-3x)(8a^2+9x^2)$ 20. $(a+3b-5c)(a-3b+5c)$ 21. $4xy$ 22. $(5a+3x)(a+x+3z)$ 23. $(2a-2b+3c-3d)(2a-2b-3c+3d)$ 24. $(7x+5y-3z)(7x-5y+3z)$ 25. $12(x+2)(5x-1)$ 26. $2a(b-c)$ 27. $(3a+b-c)(a-7b+9c)$ 28. $(2a+27x-41y)(14a+21x+23y)$ 29. $-9(x+a)(x-a)(x^2+a^2)$ 30. $28a(5a-3)$

Example 31.

1. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ 2. $(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$

3. $(a+b-c)(a-b+c)$ 4. $(7m^2+2mn-4n^2)(7m^2-2mn-4n^2)$ 5. $(2x^2+2xa+a^2)(2x^2-2xa+a^2)$ 6. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ 7. $(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$ 8. $(a^2+ax+x^2)(a^2-ax+x^2)$ 9. $(a^2+ax+x^2)(a^2-ax+x^2)(a^4-ax+x^2)$ 10. $9(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ 11. $(a^2+2a+3)(a^2-2a+3)$ 12. $(x^2+x-3)(x^2-x-3)$ 13. $(2x^2+2x+3)(2x^2-2x+3)$ 14. $(2x^2+2x-3)(2x^2-2x-3)$ 15. $(3x^2+x+4)(3x^2-x+4)$ 16. $(a+1)(a-1)(3a+4)(3a-4)$ 17. $(3x^2+3x-4)(3x^2-3x-4)$ 18. $(3a^2+5a+4)(3a^2-5a+4)$ 19. $(4x^2+6xa+5a^2)(4x^2-6xa+5a^2)$ 20. $(3a^2+7ax+5x^2)(3a^2-7ax+5x^2)$ 21. $(x^2+4x+12)(x^2-4x+12)$ 22. $(x+y+z)(x-y+z)$ 23. $(2a+b-3c)(2a-b+3c)$ 24. $(3x+2y-3z)(3x-2y+3z)$ 25. $(a+2b-5c)(a-2b+5c)$ 26. $(a-2b+3c-2d)(a-2b-3c+2d)$ 27. $(x+z)(x-2y-z)$ 28. $(2x+3a+5b+1)(2x+3a-5b-1)$ 29. $(3x+2y-7z-5)(3x-2y+7z-5)$ 30. $(4a+3b-4c-3)(4a-3b+4c-3)$ 31. $(a+1)(a-1)(a+2)$ 32. $(1+x)(1-x)(1-2x)$ 33. $(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)$ 34. $(x-z)(x+y+z)$ 35. $(a+b-3c)(a-b+3c)$ 36. $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$ 37. $(x^2+5x+1)(x^2-5x+1)$ 38. $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$ 39. $(2x^2+3x+3)(2x^2-3x+3)$ 40. $(x^2+6x+2)(x^2-6x+2)$ 41. $(3x^2+xy+y^2)(3x^2-xy+y^2)(9x^4-5x^2y^2+y^4)$ 42. $(2x^2+4xy+y^2)(2x^2-4xy+y^2)$ 43. $(2x^2+3xy+3y^2)(2x^2-3xy+3y^2)$ 44. $(2x^2+2xy+3y^2)(2x^2-2xy+3y^2)$ 45. $(3x^2+2xy-5y^2)(3x^2-2xy-5y^2)$ 46. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$ 47. $(a^2+3a+9)(a^2-3a+9)(a^4-9a^2+81)$ 48. $a^{\frac{1}{4}}(9a^4+5a^2+4)(9a^4-5a^2+4)$ 49. $(x-7x+5z-2)(x-7y-5z+2)$ 50. $(4x+$

$3y+5a-7b)(4x-3y+5a-7b)$ **51.** $(7x-4y+8z-1)(7x-4y-8z+1)$ **52.** $(a+b-c-d)(a-b+c-d)$ **53.** $(x-y)(x+y+3)$.

Example 32.

1. $(x-2)(x^2+2x+4)$ **2.** $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$ **3.** $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)$ **4.** $x(4x^2-a)(16x^4+4ax^2+a^2)$ **5.** $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ **6.** $a(a-3x)(a^2+3ax++9x^2)$ **7.** $(2x+1)(4x^2-2x+1)(64x^6-8x^3+1)$ **8.** $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)(a^6+8a^3b^3+64b^6)$ **9.** $(2ab+c)(4a^2b^2-2abc+c^2)$ **10.** $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$ **11.** $(3x+4y)(9x^2-12xy+16y^2)$ **12.** $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$ **13.** $(10+x)(100-10x+x^2)$ **14.** $(x+2)(x-2)(x^4+4x^2+16)$ **15.** $(x+2b)(x-2b)(x^4+4bx+16b^3)$ **16.** $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ **17.** $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$ **18.** $(a+b+2)(a^2+b^2+2ab+2a+2b+4)$ **19.** $x(x-1(x^2+x+1)$ **20.** $2(1-2x)(1+2x+4x^2)$ **21.** $(2x+y)(4x^2+2xy+y^2-1)$ **22.** $(x+y)(x+z)(x^2-xz+z^2)$ **23.** $(x-y)(x-z)(x^2+xz+z^2)$ **24.** $(2x-3y)(4x^2+2y^2-6xy)$ **25.** $(x-y)(x^2-xy+y^2)$ **26.** $(2a-3b)(4a^2+2b^2-6ab$ **27.** $(x+y-2z)(x^2+y^2+4z^2+2xy+2xz+2y)$ **28.** $(ax+bx-cz)(a^2x^2+b^2x^2+4c^2z^2+2abx^2+2aczx+2bczx)$ **29.** $8(x-2y-2z)(x^2+4y^2+4z^2+2xy-2xz-8yz)$ **30.** (i) ·25 (ii) ·4699

Example 33

1. $(x+3)(x+4)$ **2.** $(x-6)(x-7)$ **3.** $(x+8)(x-9)$ **4.** $(x+16)(x-12)$ **5.** $(x+y(x-8y)$ **6.** $(x+2)(x-)(x^2-7)$ **7.** $(x+4)(x-10)$ **8.** $(x-4)(x-10)$ **9.** $(x+2)(x-10)$ **10.** $x+1)(x+2)$ **11.** $(x+2)(x+3$ **12.** $(x+3)(x+4)$ **13.** $(x+4)(x+5)$ **14.** $(x+1)(x+3)$ **15.** $(x+1)(x+4)$ **16.** $(x-5)(x-9)$

17. $(x-10)(x-170)$ 18. $(x-10)(x-7)$ 19. $(x+9)(x-10)$ 20. $(x+10)(x-11)$ 21. $(x+12)(x-13)$ 22. $(x-4)(x+20)$ 23. $(x-5)(x+15)$ 24. $(x-5)(x+13)$ 25. $(x-a)(x-a-10)$ 26. $(x-y-1)(x-y-3)$ 27. $(x+3)(x+2)(x^2+5x+1)$ 28. $(a-1)^2(a+1)(a-3)$ 29. $(x+1)(x-4)(x^2-3x+1)$ 30. $(x-3)(x+3)(x+5)(x+11)$ 31. $(x+3)(x+4)(x-9)(x-10)$ 32. $(x+3)(x-3)(x^2+7)$ 33. $(x+1)(x-1)^2(x-3)$ 34. $(x+2)(x-2)(x-4)(x-8)$ 35. $(x-1)(x-2)(x+2)(x+5)$ 36. $(a^2+a-5)(a^2+a-21)$ 37. $(x+11y)(7x+5y)$ 38. $5(2a-b)(6a-b)$ 39. $(x-2)(x-3)(x-12)(x+18)$ 40. $(x+2a)(x+a+4b)$ 41. $(x+2b)(x+3a+2b)$ 42. $2(x^2-y^2)(11y^2-9x^2)$ 43. $(x^2+3x-1)(x^2+3x-2)$ 44. $(x^2-5x-2)(x^2-5x+12)$ 45. $(x-2)(x+2)(x+3)(x+7)$ 46. $(x+2)(x-2)(x-5)(x-9)$ 47. $(x+2y+2)(x+2y-3)$ 48. $(x+y+z-1)(x+y+z-2)$ 49. $(x^2+3x+1)(x^2+3x-4)$ 50. $(x+3)(x-3)(x-5)(x-11)$

Example 34

1. $(2x+1)(3x+2)$ 2. $(3x+4)(2x-3)$ 3. $2(a-1)(a+2)$ 4. $(3x+4y)(2x-3y)$ 5. $(x+4)(4x-5)$ 6. $(a+4b)(2a-3b)$ 7. $(x-2)(x+2)(4x^2+3)$ 8. $(x+1)(2x+3)$ 9. $(x+3)(2x+1)$ 10. $(3x+2)(2x+5)$ 11. $(x-4)(4x-1)$ 12. $(3x+8)(8x+7)$ 13. $(4x+3)(3x-7)$ 14. $(3x+5)(5x-6)$ 15. $(x-9)(9x-5)$ 16. $(5ab-3)(2ab+7)$ 17. $(5a+3b)(2a-5b)$ 18. $xy(2x+y)(x-2y)$ 19. $(2x+3)(3x-5)$ 20. $(2x-3)(3x+1)$ 21. $(x+4)(2x+5)$ 22. $(1+x)(5+2x)$ 23. $(x+1)(2x+1)$ 24. $(1-2x)(5+x)$ 25. $(x+1)(3x-8)$ 26. $(2x-7)(x+6)$ 27. $(x-4)(2x-5)$ 28. $(2x-1)(3x+2)$ 29. $(3x-1)(2x+3)$ 30. $(2x-5)(7x-1)$ 31. $(3x+2)(4x-3)$ 32. $(2x+7)(9x-5)$ 33. $(3+4x)(4-5x)$ 34. $(3-4x)(5+7x)$ 35. $(a-2b)(2a-b)$ 36. $(2a-5b)$

34. $(x-1)(x^2+3x+3)$ 35. $(x-1)(x+3)(2x+1)$ 36. $(x-1)(x^2+2x-7)$ 37. $(x-1)(x+2)(x-3)$ 38. $(x-1)(x^2-3x-2)$ 39. $(x+1)(x^2+4x-6)$ 40. $(x-2)(x^2-4x+5)$ 41. $(x-2)(x^2-x-8)$ 42. $(x-2)(x+3)(x+6)$ 43. $(x-2)(x-3)(x+5)$ 44. $(x-2)(2x^2+x+2)$ 45. $(x+2)(x-4)^2$ 46. $(x+2)(x-4)^2$ 47. $(x+3)(x^2-3x+4)$ 48. $(x-5)(x^2-2x+3)$ 49. $(x-5)(x^2+3x-8)$ 50. $(x-3)(x^2+2x+5)$

Example 38

1. $(a+b-3c)(a-b+3c)$ 2. $(a+b+c-d)(a+b-c+d)$ 3. $\{(a-b)x+(a+b)y\}\{(a+b)x-(a-b)y\}$ 4. $(x-y+1)(x^2+xy+y^2-x-2y+1)$ 5. $(x-3y)(x+8y+1)$ 6. $(a-2b)(2a-3b+c)$ 7. $(a-b-2c)(a-3b+2c)$ 8. $(a+3)(2a-b)$ 9. $(x+z)(x-z)(x^2+y^2+z^2)$ 10. $-2(a-b+1)(a-b-1)$ 11. $(2x+z)(2x-2y+z)$ 12. $(x-1)(y-1)(x-y)$ 13. $(a-3b)(a+3b+x)$ 14. $(x-b)(x+b-2a)$ 15. $(x+yz)(y+zx)$ 16. $(y-3)(x-y+z)$ 17. $(a-b)(a-b+2)$ 18. $(2a-b)(3a+b+3)$ 19. $(x-y)(x-y-1)$ 20 $(2a-b)(2a-b-3)$ 21. $(2a+3b)(2a+3b-4)$ 22. $(2a+b-3c)(2a-b+3c)$ 23. $(2a+b+3c)(-2a+b-3c)$ 24. $(a+2b-5c)(a-2b+5c)$ 25. $(a+b-c-d)(a-b+c-d)$ 26. $(a+2b)(a+b+c)$ 27. $(x-3y)(x+y-z)$ 28. $(a-3b)(a-7b+5c)$ 29. $(a-4b)(a-2b+3)$ 30 $\{(a+b)x+(a-b)y\}\{(a-b)x+(a+b)y\}$ 31. $(x-2y-z)(x-4y+z)$ 32. $(a-b+c)(a+5b-c)$ 33. $(a+b-c)(a+3b+c)$ 34. $(x-y-z)(x-5y+z)$ 35. $(x+4y-2z)(x-2y+2z)$ 36. $(4a+b+c)(2a-b-c)$

Example 39

1. $(2a-3b+1)(2a-3b-3)$ 2. $(x-y-1)(x+2y+3)$

3. $(x-y-1)(x-4y+2)$ 4. $(x-a-1)(x+a+2)$ 5. $(x-2y+1)(2x-3y-1)$ 6. $(x+y+1)(x-y+5)$ 7. $(x+2y+z)(2x+y+3z)$ 8. $(x+y+1)(x+2y+1)$ 9. $(x-2y-2z)(x-y+2z)$ 10. $(a-b+2c)(a-2b-2c)$ 11. $(2x-3y-4z)(x+y+z)$ 12. $(2x+y+3z)(x+2y+2z)$ 13. $(2x+y-3z)(2x-3y+3z)$ 14. $(y-3)(x-y+2)$ 15. $(a-2b+1)(3a-2b-3)$ 16. $(2x-3y-2)(3x+4y+1)$ 17. $(2x+2y-z)(3x-y-3z)$ 18. $(2x-y-z)(3x+y+2z)$ 19. $(2x+y+3)(3x+2y+1)$ 20. $(2a+b+3c)(3a+2b+c)$ 21. $(2x+3y+4)(3x-2y-5)$ 22. $(x+3y-1)(6x+4y+3)$ 23. $(x-2y+3z)(x+2y-3z+4)$ 24. $(a-3b+2c)(a-b-2c)$ 25. $(x-y-z)(2x+3y+z)$.

Example 40.

1. $(b+c)(c+a)(a+b)$ 2. $(b+c)(c+a)(a+b)$ 3. $(a+b+c)(ab+bc+ca)$ 4. $(a+b+c)(ab+bc+ca)$ 5. $-(b-c)(c-a)(a-b)$ 6. $-(b-c)(c-a)(a-b)$ 7. $(y+z)(z+x)(x+y)$ 8. $-(b-c)(c-a)(a-b)$ 9. $-(b-c)(c-a)(a-b)$ 10. $(x+y+z)(xy+yz+zx)$ 11. $-(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$ 12. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$ 13. $-(y-z)(z-x)(x-y)(xy+yz+zx)$ 14. $(a+b+c)(ab+bc+ca)$ 15. $(a+b)(b+c)(c+a)$ 16. $(x+y)(y+z)(z+x)$ 17. $(b-c)(c-a)(b-a)(b+c)(c+a)(a+b)$ 18. $(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$ 19. $(y-z)(z-x)(y-x)(y+z)(z+x)(y+x)$ 20. $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+bc-ca+ab)$ 21. $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$ 22. $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)$ 23. $(x^2+2x-4)(x^4+2x^3+8x^2+8x+16)$ 24. $(a^2+3a+5)(a^4-3a^2+4a^2$

$-15a+25)$ 25. $(x+2y+3z)(x^2+4y^2+9z^2-2xy-6yz-3xz)$ 26. $3(b-c)(c-a)(a-b)$ 27. $(2x-y-z)(4x^2+y^2+z^2+4xy-yz+4zx)$ 28. $(x+2y+3z)(2y+3z-x)(3z+x-2y)(x+2y+3z)$ 29. $(b-c)(c-a)(a-b)$ 30. $(a-b)(b-c)(c-a)$ 31. $(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c+1)$ 32. $(a-b)(b-c)(a-c)$ 33. $-(b-c)(c-a)(a-b)$ 34. $(a-b)(b-c)(a-c)$ 35. $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$ 36. $(a-b)(b-c)(a-c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$ 37. $(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$ 38. $-(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)$ 39. $3(y-z)(z-x)(x-y)$ 40. $3(2x-3y)(3y-z)(z-2x)$ 41. $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}-\frac{x}{z}-\frac{z}{y}-\frac{y}{x}\right)$ 42. $3abc(a-b)(b-c)(c-a)$

46. 4200 47. 249 48. 1950 49. 48 50. 234 51. 99 52. 88 53. 26000 54. (i) 104 (ii) 27 (iii) 442 55. 0

Example 41.

1. $2a^4b$ 2. $(a+b)$ 3. $(x+y)$ 4. $2a^2b^2c^3$ 5. $6xy^2$ 6. $(x-2)$ 7. a 8. $a(a-b)$ 9. $x^2(x+y)$ 10. x^2-3x-4 11. $(x+3)$ 12. $(x-2)(x+3)$ 13. $2x+1$ 14. $x-2$ 15. $(x-1)$ 16. $(x-1)$ 17. $x(x+2)$ 18. $x(x+3)$ 19. $x-1$ 20. $x+1$ 21. $x-1$ 22. $(x-2)$ 23. $(x+2)$ 24. $(x+1)$ 25. $(2x+1)$ 26. $x-5$ 27. $x-3$ 28. $x+2$ 29. $x+2$ 30. $a+2$ 31. $2x+3$ 32. $2x+1$ 33. $2x+3$ 34. $a-2b$ 35. $x-2$ 36. $x+5$ 37. $x-2$ 38. x^2+5x+6 39. $(2x-1)$ 40. $x-3$.

Example 42.

1. $x-2$ 2. x^2+3x+1 3. x^2-2x+1 4. x^2-2x+5 5. $x-2$

6. $x+2$ 7. $x-1$ 8. $(x-2)$ 9. $3x+1$ 10. x^2-2x+1 11. $x+2$ 12. $x-1$ 13. $x(2x^2+x+1)$ 14. $x(3x+4)$ 15. $2(x-1)$ 16. $2(x-1)$ 17. $2x(x-2)$ 18. $x+3$ 19. x^2-5x+6 20. $x+2$ 21. x^3-3x+2 22. x^2-1 23. $(x+1)(x+2)$ 24. $x-1$ 25. $x+1$ 26. $x-3$ 27. x^2+x+1 28. x^2+3x+4 29. $3a^2+3ab-b^2$ 30. $x-1$ 31. x^2-2x-3 32. x^2-3x+2 33. $(x+1)^2$ 34. x^2-x+1 35. $x+1$ 36. x^2-3x+4 37. x^3+2x-1 38. x^2-3x+2 39. $2(a^2+5a+2)$ 40. x^2+x-2 41. x^2+x-2 42. $2x+3$ 43. x^2-x+1 44. $2x+3a$ 45. $x+5$ 46. $2x(x^2-3x-2)$ 47. x^2+2x-1 48. $3a-1$ 49. $5x^2-3x+2$ 50. x^2-3x+5.

Example 43

1. $x^3y^2(x^2-y^2)$ 2. $x^3(x+y)$ 3. $a(a^2-b^2)$ 4. $(a+b)^2(a-b)$ 5. $(a+b)^3(a^2-ab+b^2)$ 6. $a^2b^2(a+b)$ 7. abc 8. a^3+b^3 9. $(1-x)^2(1+x)$ 10. a^2-b^2 11. $a^2b(a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$ 12. $abc(a-b)(c-a)(b-c)$ 13. $abc(a-b)(c-a)(b-c)$ 14. $(a-b)(c-a)(b-c)(a^2+ab+ac)$ 15. $(a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)$ 16. $(a+b)(b+c)(c+a)$ 17. $(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)$ 18. $(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$ 19. $(x+1)(x+2)(x+3)$ 20. $(x+2)(x+3)(x+5)$ 21. $(x-1)(x-2)(x-3)$ 22. $(x-1)(x-2)(x-4)$ 23. $(x+1)(x+3)(x-4)$ 24. $(x-1)(x-2)(x-3)$ 25. $(x-1)(x+1)(x+2)$ 26. $(x-1)(x-2)(2x+3)$ 27. $(x-1)(x-2)(x-3)$ 28. $24x(x-2)^2(x+3)(x^2+2x+4)$ 29. $(x-2)(x-3)(2x+1)$ 30. $(x-1)(x+1)(2x+1)$ 31. $(x-4)(2x-1)(3x+2)(2x-9)$ 32. $(x+2)(2x-1)(3x+1)$ 33. $6x(x+1)(x-3)(x-4)$ 34. $(x-1)(x+2)(x-3)(x^2$

$+1)$ **35.** $(2x+3)(2x-3)(3x+2)(4x^2+6x+9)(4x^2-6x+9)$ **36.** $(2x+1)(2x-3)(2x+9)(3x-1)$ **37.** $12xy(x+y)(x-2y)(x+2y)$ **38.** $(x+2y)(x-3y)(x-5y)(x+7y)$ **39.** $(x-2a)^2(x-y+2a)(x+y-2a)$ **40.** $2(2x+3)(2x-3)(4x^2-6x+9)$ **41.** $(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$ **42.** $(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)(x^2-4)$ **43.** $(2x+3)(3x-2)(4x^2-6x+9)(2x^2+9)^2$ **44.** $(a-2b)(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)(a^2+2a5+4b^2)$ **45.** $x^2(x-1)(x-2)(x+3)$ **46.** $(x-1)^3(x+1)(x^2+1)$ **47.** $48(x+6)(x+5)(x-2)$ **48.** $(x+7)(x+5)(x+4)(x-3)$ **49.** $2x(4x^4+81)$ **50.** $(2x-1)^2(4x^2-1)(x+3)$.

Example 44

1. $(x+1)(x+2)(x+3)$ **2.** $(x-2)(x^3+5x^2-9x+35)$ **3.** $(x^2-x+1)(x^4+2x^3+4x^2+2x+3)$ **4.** $(x+1)(x^3+3x^2-x-6)$ **5.** $(x-3)(x^3+2x^2-5x-6)$ **6.** $(x-1)(x+2)(x+3)(x^2-3x+1)$ **7.** $x^4-3x^3-9x^2-22x+1$ **8.** $(x^2-3x+2)(2x^3-4x^2+3x-1)$ **9.** $9x^4+30x^3-17x^2-76x+32$ **10.** $2(2x-4)(2x^3+x^2+x-1)$ **11.** $(3x-1)(2x^2+3x-2)(4x^2-3x+1$ **12.** $x^4+x^3-2x^2-x+1$ **13.** $18x^4-45x^3+37x^2-19x+6$ **14.** $(x-1)(3x^3+7x^2-4)$ **15.** x^4-y^4 **16.** $(x-1)^3(x^2+1)$ **17.** $(x+1)(2x^4-x^3-9x^2+4x+4)$ **18.** $(3x-1)(2x^2+3x-2)(4x^2-3x+1)$ **19.** $(x^2-x+3)(x^4+2x^3-5x^2-6x+9)$ **20.** $(x^2-3x+2)(x^4+7x^3+14x^2+7x+1)$ **21.** $(x^2-x+1)(x^4-x^2-x+1)$ **22.** $3x^4+4x^3-16x+48$ **23.** x^3+1 **25.** $(a-b)(a^3+b^3)(a+b)(a^3-b^3)$ **26.** $(x-1)(x-2)^2(x+3)$ **27.** $(x-4)(3x+2)(2x-1)(2x-9)$ **28.** $24x(x-2)^2(x+3)(x^2+2x+4)$ **29.** $(3x+2)(2x+3)(x^2-3x-4)$ **30.** $(2x-5)(6x^3+25x^2+$

$16x+7)$ **31.** $(2x-3)(6x^2+25x-9)$ **32.** $(x^2-3)^2(9x^4-1)$ $(9x^2-1)$ **33.** $48x^5-64x^4-120x^3+160x^2+27x-36$ **34.** $32x^6-24x^5-8x^4+18x^3-48x^2+27x-28$ **35.** $48x^4-92x^3-128x^2+157x-30$ **36.** $x^6+4x^5+2x^4+4x^2-2x-1$ **37.** $12x^2(4x^2-25y^2)(2x-y)$ **38.** $(2x-3a)^2(9x^2-a^2)$ **39.** $6(3a-x)^2(a^2-4x^2)$ **40.** $(x-2y)(x-3y)(x-4y)(x+5y)$ **41.** $(2x-1)(3x+1)(x+2)$ **42.** $(1-4x^2)(1+2x+4x^2)(1+2x-4x^2)$.

Example 45

1. $\frac{1}{2y}$ **2.** $\frac{3a}{2b}$ **3.** $\frac{2a}{5x}$ **4.** $\frac{4}{3}\ \frac{bc}{az}$ **5.** $\frac{3}{5}\ \frac{zx}{y^3z}$ **6.** $\frac{2}{3}\ \frac{d}{ab}$ **7.** $\frac{2}{5}\ \frac{az}{xy}$ **8.** $\frac{2}{3}\ \frac{d5}{a}$ **9.** $\frac{3}{5}\ \frac{pqn}{m}$ **10.** $\frac{x-a}{x}$

11. $\frac{-1}{3+x}$ **12.** $\frac{2x-3a}{2x}$ **13.** $\frac{x-5}{x-4}$ **14.** $\frac{x-3}{x+4}$ **15.** $\frac{x-2}{x-3}$

16. $\frac{a-4b}{a-5b}$ **17.** $\frac{1-4x}{1-5x}$ **18.** $\frac{2x-5}{3x-2}$ **19.** $\frac{3a-4b}{4a+3b}$ **20.** $\frac{3x-8}{x^2-2x+4}$

21. $\frac{x^2}{x+y}$ **22.** $\frac{3+a}{2}$ **23.** $x^2-4ax+8a^2$ **24.** $\frac{3x^2+y^2}{4x-y}$

25. $x+3$ **26.** $\frac{x+1}{x+2}$ **27.** $\frac{1-x+2x^2}{2+x+x^2}$ **28.** $\frac{x^3-2x+1}{x^2-3x+1}$

29. $\frac{1+2x-3x^2}{1-2x+3x^2}$ **30.** $\frac{x^2+3x+5}{x^2+3x-5}$ **31.** $\frac{x(x+2)^2}{(x+1)x^2-x+1}$

32. $\frac{a+b+c}{2}$ **33.** $\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{ab+bc+ca}$ **34.** -3

35. $\frac{3}{a+b+c}$ **36.** $\frac{1}{a+b+c}$

Example 46

1. $\frac{4}{9}$ 2. $\frac{a^2}{9}$ 3. xyz 4. $\frac{1}{9}$ $\frac{x^2y^2z^2}{a^2b^2c^2}$ 5. $2x(x+y)$

6. $\frac{x+2}{x}$ 7. 3 8. $\frac{a^2-b^2}{a}$ 9. $\frac{a^2-4x^2}{a^2}$ 10. 1 11. $\frac{a^2(a-b)}{x}$

12. $\frac{x^4-a^4+x^2a^2}{a^4}$ 13. $\frac{a+b-c}{a+b+c}$ 14. 1 15. $\frac{5ax}{6by}$ 16. $\frac{(a+b)^2}{b}$

17. $\frac{x-7}{x-5}$ 18. $a-b$ 19. $\frac{m-n}{m+2n}$ 20. $(m-n)^2$ 21. xy

22. ab 23. $\frac{x^2+y^2}{(x-\sqrt{x^2-y^2}(\sqrt{x^2+y^2}+y)}$ 24. $\frac{x-5}{x-4}$

25. 1 26. 1 27. $\frac{x-5}{x-1}$ 23. 1 29. $\frac{9y^2-x^2}{16y^2-x^2}$

30. $\frac{(2+x)(1+2x+4x^2)}{2-x}$

Example 47

1. 1 2. $\frac{a^2+b^2}{xb}$ 3. 1 4. $\frac{4ab}{a^2-b^2}$ 5. $\frac{1}{2}$ $\frac{a+b}{a-b}$ 6. $\frac{12xy}{4x^2-9y^2}$

7. $\frac{a^2-b^2-2ab}{(a+b)^2(a-b)}$ 8. $\frac{2a^3}{a^2-b^2}$ 9. $\frac{1}{(a-b)(b-c)}$

10. $\frac{2}{(x-1)(x-3}$ 11. $\frac{x^2+3x+25}{(x^2-7x+10)(x^2+13x+40)}$

12. $\frac{2}{(x+2)(x+8)}$ 13. $\frac{2ab}{a^2-b^2}$ 14. 0 15. $\frac{4y^3}{x^2-y^2}$

16. $\frac{4ax}{a^2-4x^2}$ 17. $\frac{3x^3-13x^2+14x+24}{2(x-3)(x+3)(3x+1)}$ 18. $\frac{2b}{1-16a^2b^2}$

19. $\frac{4x^4}{x^4 - 16a}$ 20. $\frac{8a^7b}{a^8 - b^8}$ 21. $\frac{54x^6}{81x^4 - y^4}$ 22. $\frac{x^3 + 81a^3}{x^4 - 81a^4}$

23. $\frac{b^3}{(a+b)^3}$ 24. $\frac{1}{a^2 - 1}$ 25. $\frac{8a}{64a^4 - 1}$ 26. $\frac{4x^3}{81 - x^4}$ 27. $\frac{16x}{16 - x^4}$

28. 0 29. $\frac{2}{x+y}$ 30. $\frac{64ax^3}{16x^4 - a^4}$ 31. 2 32. $\frac{1}{(x-1)(2x+1)(3x-2)}$

33. $\frac{2}{x+1}$ 34. $\frac{3x+2}{(x-2)(x^2-1)}$ 35. 0 36. $\frac{4x^3}{1 + x^4 + x^8}$

37. 1 33. 3 39. 6 40. $a^2 + b^2 + c^2$ 41. $\frac{-a}{b}$ 42. 2

43. $2\frac{a^4 + b^4}{a^2b^2}$

Example 48

1. y 2. $\frac{1}{x}$ 3. 1 4. $\frac{a^2 - b^2}{2}$ 5. $\frac{ab(a-b)}{a+b}$ 6. 2 7. $\frac{y^2}{x^2 + y^2}$

8. $\frac{1}{2x^2 + 1}$ 9. $\frac{x(x+y+z)}{z(x-y+z)}$ 10. $\frac{a^2 - b^2}{x^2 - y^2}$ 11. $\frac{2x}{y^2(x^2 - y^2)}$

12. $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$ 13. $-x^2y^2z^2$ 14. $-\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{ab(a-b)^2}$

15. $-\frac{4xy(x^2+y^2)}{x^4 + x^2y^2 + y^4}$ 16. $(a-b)$ 17. $1 - x$ 18. $a + 2$

19. $\frac{x-1}{x^2}$ 20. x 21. 1 22. $\frac{b}{a}$ 23. 1 24. $\frac{{}^2 + y^2}{2xy}$

25. $\frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 10x + 21}$ 26. $\frac{1}{p^2 + q^2}$ 27. $a^2 - b^2$ 28. xy 29. ab

30. $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ 31. $\frac{a}{a-b}$ 32. $a^2 - b^2$ 33. 1 34. 1 35. 1

36. $\frac{a}{2x^2}$ 37. x 38. 1 39. $\frac{b}{a}$ 40. $\frac{a^2-b^2}{2ab}$

Example 49

1. 0 2. 0 3. 1 4. $\frac{1}{abc}$ 5. 0 6. 0 7. 0 8. 0 9. 0 10. $\frac{1}{abc}$

11. -1 12. 2 13. 1 14. 0 15. $ab+bc+ca$ 16. $(a+b+c)$

17. 1 18. d 19. x 20 0 21. $\frac{1}{abc}$ 22. 1 23. 3 24. 1

25. $\frac{1}{abc}$ 26. 0 27. 0 28. 1 29. 0 30. 1

33. $\frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Example 51

1. 3 2. 5 3. -9 4. -4 5. 0 6. 8 7. 45 8. -30
9. 20 10. 5 11. $1\frac{1}{7}$ 12. 8 13. 4 14. 2 15. 3 16. 2

17. 11 18. 4 19. 13 20. 3 21. -2 22. -8 23. 5

24. 1 25. $a+b$ 26. -2 27. 9 28. 3 29. 30 30. 2

31. 4 32. -2 33. $3\frac{4}{5}$ 34. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ 35. $-\frac{a+b}{2}$

Example 52

1. $3\frac{1}{8}$ 2. 11 3. $11\frac{1}{2}$ 4. $6\frac{1}{4}$ 5. 1 6. $7\frac{1}{2}$ 7. 12 8. $\frac{6}{7}$

9. $\frac{1}{3}$ 10. 5 11. 2 12. $-\frac{1}{7}$ 13. -1 14. $2\frac{2}{15}$ 15. 6

16. 11 17. 11 18. 2 19. 3 20. $\frac{6}{7}a$ 21. 4 22. $-\frac{1}{7}$

23. 20 24. $2\frac{35}{29}$ 25. 8 26. $2\frac{111}{136}$ 27. 15 28. $4\frac{1}{2}$ 29. 7 30. $3\frac{2}{41}$

31. 20 32. 3·5 33. 10 34. 7 35. ·48 36. $-3·6$ 37. 9

38. 5 39. 2·7383 40. 2·5 41. 6 42. $-7·5$ 43. $-·3$

44. 14 45. 2 46. $\dfrac{ab}{b-a}$ 47. $\frac{1}{3}$ 48. $-\frac{6}{7}$ 49. 7 50. 6

51. 20 52. $x=0$ 53. $a+b$ 54. c या, $c-\dfrac{a+b}{2}$ 55. 3

Example 53

1. 45, 25 2. 360 3. 52 4. 400 5. 4 रु० 5 पैसे 6. 48, 64, 80 7. 14, 18, 8, 32 8. 46, 48 9. 240 अंडे 10. 131, 121 11. 45, 46, 47 12. 15 13. 23 14. 37 और 62 15. 45 साल और 15 साल 16. 12 17. 50 और 70 18. 150, 120 और 190 रु० 19. 92 साल 20. 26 21. 84 22. 60 अंडे 23. 1830 रु० 24. 1500 25. 38 साल और 14 साल 26. 32 वर्ष और 11 वर्ष 27. 40 वर्ष और 10 वर्ष 28. 80 साल 29. $A=36$ वर्ष $B=27$ वर्ष 30. 14 31. 15, 65 32. 24 फोट 33. 26 34. 47, 32 38. 68, 32 39. 24 40. 40, 8 41. 60, 15 42. 32 43. 35, 15 44. $A=50$ वर्ष, $B=30$ वर्ष 45. 450 46. 92, 94 47. 35, 15 48. 45 सिक्के 49. 960 50. यात्री $=24$, कमरे $=14$ 51. 54 52. 26 53. 128, 156 54. 14 55. 9 हर किस्म के 56. 400 रु० 57. 6 भिखमंगे और 140 पैसे 58. 25 वर्ष 59. 56 60. 42 61. 91, 19 62. 19, 5, 4, 32

Example 54

1. 15 2. $-\frac{63}{76}$ 3. 2 4. 3 5. $\frac{2}{5}$ 6. $3\frac{1}{2}$ 7. $4\frac{1}{4}$ 8. $6\frac{1}{2}$

9. $\dfrac{bn-am}{m-n}$ 10. $\dfrac{c^2-ab}{a+b-2c}$ 11. $a+b+c$ 12. $ab+bc+ca$

13. $a+b+c$ 14. $(a+b+c)^2$ 15. $a^3+b^3+c^3$ 16. $-(a^2+b^2-c^2$

17. $a+b$ 18. 6 19. 20 20. -2 21. $\dfrac{2(a-b)(b-c)}{c-a}$

22. $26\frac{1}{3}$ 23. $-\frac{19}{28}$ 24. $-3\frac{3}{7}$ 25. $\dfrac{a^2-bc}{b+c-2a}$ 26. $\dfrac{ab}{a-2b}$

27. $a+b$ 28. 5 29. $\frac{8}{17}$ 30. $\frac{3}{2}$ 31. -3 32. $a^2+b^2+c^2$

33. $-(a+b+c)$ 34. $a+b+1$ 35. $\frac{ab+bc+ca}{abc}$ 36. $ab+bc$ $+ca$ 37. 0 38. $-(a^2+b^2+c^2)$ 39. -3 40. 6 41. 0

43. $\frac{-(2ab+ac+bc)}{a+b+2c}$ 43. $\frac{a+b}{2}$ 44. $\frac{a}{3}$ 45. $\frac{a+b+c}{3}$

46. -2 47. $\frac{-3abc}{ab+bc+ca}$ 48. $\frac{3}{4}(a+b+c)$ 49. $-\frac{1}{2}(a^2+b^2$ $+c^2)$ 50. 25 51. 16 52. 8 53. 8 54. 10 55. 3 56. $\frac{2}{5}$

57. 15 58. $\frac{-}{76}$ 59. 2 60. $c,\ \frac{2c-(a+b)}{2}$ 61. $\frac{-19}{28}$

62. -1 63. $\frac{31}{47}$ 64. $-\frac{4}{5}$ 65. $1\frac{12}{13}$ 66. $\frac{a^2-dc}{a+b-2a}$

67. $\frac{-}{2}$ 68. $-1\frac{1}{2}$ 69. $4\frac{1}{2}$ 70. 2 71. 4 72. -7

73. 6 74. 13 75. 8 76. $4\frac{1}{2}$ 77. 6 78. 7 79. $2\frac{1}{2}$ 80. $4\frac{1}{2}$

81. $8\frac{1}{2}$ 82. $-\frac{5}{6}$ 83. $a+b+1$ 84. 4 85. 3 86. 3

87. 2 88. $1\frac{1}{2}$ 89. $\frac{-2ab+ac+bc}{a+b+2c}$ 90. -8 91. $5\frac{1}{2}$

92. $\frac{9}{3}$ 93. $\frac{a+b}{2}$ 94. $-b$

Example 55

1. $x=\pm4$ 2. $x=\pm4$ 3. $x=\pm3$ 4. $x=\pm a$ 5. $x=\pm14$

6. $x=\pm4$ 7. $x=\pm\frac{7}{3}$ 8. $x=\pm\frac{6}{5}$ 9. $x=\pm1$ 10. $x=\pm\sqrt{\frac{7}{10}}$

11. $x=\pm2\sqrt{2}$ 12. $x=\pm5$ 13. $x=\pm3$ 14. $x=\pm2a$

15. $x=\pm a$ 16. $x=\pm6$ 17. $x=\pm1$ 18. $x=\pm\sqrt{\frac{36}{6}}$

19. $x=\pm\frac{1}{2}$ 20. $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$ 21. $x=\pm\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{7}{3}}$ 22. $x=\pm\frac{9}{2}\sqrt{5}$

23. $x=\pm\frac{1}{4}\sqrt{5}$ 24. $x=\pm2\sqrt{\frac{(a-1)(a-3)}{3}}$ 25. $=\pm5$

26. $=\pm10$ 27. $=\pm3$ 28. $=\pm3$ 29. $=\pm3$ 30. $=\pm5$

31. $=\pm4$ 32. $=\pm1\frac{1}{5}$

Example 56

1. $x=0$ या $-\frac{7}{8}$ 2. $x=-\frac{5}{2}$ 3. $x=0$ या $-\frac{7}{2}$ 4. $x=\frac{d(a+b-2c)}{bc+ca-2ab}$ 5. $x=0$ या $\frac{c-a}{2}$ 6. $x=0$ या $\frac{a^2+c^2}{a+c}$

7. $x=0$ या $-\frac{\{a^2(a-c)+b^2(b-c)\}}{ca(a-c)+bc(b-c)}$ 8. $x=0$ या $\pm\sqrt{ab}$

9. $x=0$ या $-\frac{1}{4}$ 10. $x=0$ या $\frac{15}{94}$ 11. $x=0$ या $\frac{9}{16}a$ 12. $x=0$ या a

13. $x=0$ या $\frac{4}{3}(a+b)$ 14. $x=0$ या $\pm a\sqrt{3}$ 15. $x=0\pm\sqrt{\frac{3a}{2}}$

16. $x=0$ या $\pm\sqrt{abm}$ 17. $x=0$ या $\pm a$

Example 57

1. $x=1$ या 2 2. $x=35$ या -33 3. $x=-1$ या $-\frac{a-1}{a+1}$

4. $x=2\frac{3}{33}$ या $4\frac{1}{33}$ 5. $x=-\frac{1}{31}$ या $3\frac{1}{31}$ 6. $x=(a-b)$ या $b-c$ 7. $x=\frac{a}{b}$ या $\frac{b}{a}$ 8. $x=3$ या -2 9. $x=-1$ या $\frac{1}{2}$ 10. $x=1$ या $-\frac{2}{3}$ 11. $x=\frac{b}{a}$ या $\frac{a}{b}$ 12. $x=2(\sqrt{2}+1)$ या $-3(\sqrt{2}+1)$ 13. $x=39$ या -20 14. $x=-6$ या 60 15. $x=11$ या $-9\frac{2}{13}$ 16. $x=13$ या $-9\frac{16}{19}$ 17. $x=0$ या 11 या -10 18. $x=0, -16,$ या 12 19. $x=2\frac{1}{27}$ या $\frac{26}{27}$ 20. $x=4\frac{1}{43}$

या $\frac{4}{4}\frac{3}{3}$ 21. $x=1$ या $-2\frac{1}{3}$ 22. $x=3$ या 4 23. $x=2$ या 10 24. $x=5$ या $1\frac{1}{2}$ 25. $x=-\frac{2}{3}1$ या $1\frac{1}{6}$ 26. $x=4$ या -13 27. $x-\frac{1}{2}$ या $1-1\frac{1}{3}$ 28. $x=2\frac{1}{2}$ या $-3\frac{1}{2}$ 29. $x=3$ या $2\frac{2}{3}$ 30. $x=\frac{1}{2}$ या $-5\frac{2}{3}$ 31. $x=2\frac{5}{6}$ या $-7\frac{1}{2}$ 32. $x=1\frac{1}{8}$ या $-\frac{5}{14}$

Example 58

1. $x=2\frac{1}{3}$ या $-\frac{3}{4}$ 2. $x=1\frac{2}{5}$ या $-1\frac{1}{3}$ 3. $x=3$ या $\frac{3}{5}$ 4. $x=\frac{1}{2}$ या -2 5. $x=3$ या -1 6. $x=7$ या -3 7. $x=1?$ या -6 8. $x=1$ या 2 9. $x=1$ या $-\frac{1}{2}$ 10. $x=1$ या $-\frac{3}{4}$ 11. $x=1$ या $-\frac{3}{4}$ 12. $x=\frac{1}{4}$ $3\pm$ / $-23)$ 13. $x=1$ या $-\frac{7}{3}$ 14. $x=-3$ या $\frac{5}{8}$ 15. $x=1\frac{3}{4}$ या $1\frac{1}{3}$ 16. $x=\frac{1}{2}$ या 5 17. $x=\frac{2}{3}$ या $\frac{4}{5}$ 18. $x=\frac{3}{4}$ या $-\frac{4}{5}$ 19. $x=-\frac{5}{7}$ या $-\frac{1}{3}$ 20. $x=\frac{3}{5}$ या $-\frac{2}{5}$ 21. $x=\frac{2}{3}$ या $\frac{3}{5}$ 22. $x=4$ या $5\frac{1}{2}$ 23. $x=11$ या 2 24. $x=9$ या $-\frac{1}{5}$ 25. $x=$ या $-\frac{1}{2}$ 26. $x=2$ या -1 27. $x=3$ या $-\frac{1}{3}$ 28. $x=\pm 33$ 29. $x=2$ या 4 30. $x=6$, या -1 31. $x=2$ या 7 32. $x=\pm 4$ 33. $x=1$ या 9 34. $x=2\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 35. $x=\frac{1}{2}$ 36. $x=0$ या $a+b$ 37. $x=5$ या $\frac{3}{35}$ 38. $x=2$ या -3 39. $x=a$ या b 40. $\frac{p\pm\sqrt{p^2+4q}}{2}$ 41. $\frac{5}{2}-\frac{3}{4}$ 42. $\frac{11}{5},-5$ 43. $5,-\frac{4}{3}$ 44. $\frac{7}{3}, 5$ 45. $-\frac{6}{3},-4$ 46. $\frac{5}{2},-\frac{7}{2}$ 47. $-7, \frac{7}{3}$ 48. $3, \frac{7}{6}$ 49. $3, \frac{7}{5}$ 50. $\frac{15}{8},-2$ 51. $3, -\frac{1}{3}$ 52 ± 3 53. 4, 7 54. $6, -\frac{8}{3}$ 55. $\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}$ 56. $3, -4\frac{1}{2}$ 57. $3, \frac{2}{3}$ 58. $-4, 2$ 59. ± 8 60. $6, \frac{40}{13}$ 61. 2, 7 62. $12, \frac{3}{4}$ 63. 1, 3 64. 1, 9 65 $3, -2\frac{1}{3}$ 66. $5, -\frac{3}{2}$ 67. $3\pm\sqrt{\frac{1}{8}}$ 68. $0, 3\frac{1}{2}$ 69. $x=\pm 2, -1, 3$

Example 59

1. 6 मीटर 2. 5 मीटर 3. 16 या -6 4. 3 या 13 5. 40

साल 6. 15 या − 13 7. 11, 13 और 15 8. 60 रु० 9. 20 मीटर 10. 25 मीटर प्रति घं० 11. 24 दिन 12. 4, 16 13. 24 14. 4, 13 15. 3 16. 7, 8 17. 18, 20 18. 24 19. 25 या 69 20. 3 घं० प्रति मील

Example 60

1. $x=5$, $y=2$ 2. $x=7$, $y=6$ 3. $x=4$, $y=7$ 4. $x=\dfrac{b^2+ac}{a^2+b}$, $y=\dfrac{ab-c}{a^2+b}$ 5. $x=2$, $y=3$ 6. $x=40$, $y=16$

7. $x=8$, $y=5$ 8. $x=6$, $y=4$ 9. $x=6$, $y=8$ 10. $x=5$, $y=9$ 11. $x=4$, $y=7$

12. $x=\dfrac{c(b+c)}{a+b}$, $y=\dfrac{c(c-a)}{a+b}$ 13. $x=-7$, $y=\frac{1}{13}$ 14. $x=2$, $y=3$ 15. $x=3$, $y=5$ 16. $x=5$, $y=3$

17. $y=2\frac{1}{2}$, $x=1\frac{1}{2}$ 18. $x=6$, $y=2$ 19. $x=5$, $y=7$ 20. $x=10$, $y=6$ 21. $x=-2$, $y=4$

22. $x=18$, $y=12$ 23. $x=y$, $y=4$ 24. $x=4$, $y=2$ 25. $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{3}$ 26. $x=4$, $y=10$

27. $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$ 28. $x=\dfrac{bc-c^2}{ab-a^2}$, $y=\dfrac{ac-c^2}{ab-a^2}$ 29. $x=7$, $y=9$ 30. $x=3$, $y=2$

31. $x=3$, $y=2$ 32. $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$ 33. $x=2$, $y=\frac{2}{3}$ 34. $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{8}$ 35. $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{2}$

36. $x=\frac{3}{8}$, $y=3\frac{1}{2}$ 37. $x=40$, $y=60$ 38. $x=\dfrac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$, $y=\dfrac{ab(a-b)}{a^2+b^2}$

39. $x=a$, $y=b$
40. $x=\frac{a+b}{m}$, $y=\frac{a+b}{n}$
41. $x=3$, $y=6$
42. $x=4$, $y=2$
43. $x=1$, $y=\frac{1}{2}$
44. $x=2$, $y=3$
45. $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{8}$
46. $x=2$, $y=3$
47. $x=3$, $y=2$
48. $x=3$, $y=4$
49. $x=5$, $y=6$
50. $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{8}$
51. $x=4$, $y=10$
52. $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$
53. $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{1}{6}$
54. $x=2$, $y=1$
55. $x=3$, $y=2$
56. $x=10$, $y=15$
57. $x=8$, $y=5$
58. $x=5$, $y=9$
59. $x=3$, $y=2$
60 $x=5$, $y=7$

Example 61

1. $x=8$ या 5, $y=5$ या 8
2. $x=7$ या 5, $y=5$ या 7
3. $x=15$, $y=5$
4. $x=12$, $y=8$
5. $x=4$ या 5, $y=$ या 4
6. $x=12$ या 5, $y=5$ या 12
7. $x=9$ या 4, $y=4$ या 9
8. $x=15$ या 8, $y=8$ या 15
9. $x=7$ या -3, $y=3$ या -7
10. $x=13$ या -4, $y=4$ या -13
11. $x=2$, $y=3$
12. $x=2$, $y=7$
13. $x=2$, $y=5$
14. $x=4$, $y=3$
15. $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{2}$
16. $x=5$, $y=3$
17. $x=8$, $y=5$
18. $x=7$, $y=1$
19. $x=5$, $y=4$
20. $x=9$, $y=1$
21. $x=10$, $y=1$
22. $x=5$, $y=4$

Example 62

1. $x=1$, $y=2$
2. $x=2$, $y=3$
3. $x=3$, $y=4$
4. $x=4$, $y=5$
5. $x=5$, $y=6$
6. $x=6$, $y=7$
7. $x=1$, $y=2$, $z=3$
8. $x=2$, $y=-3$, $z=1$
9. $x=3$, $y=4$, $z=2$
10. $x=2$, $y=6$, $z=4$
11. $x=1$, $y=3$, $z=5$
12. $x=2$, $y=3$, $z=3$
13. $x=3$, $y=6$, $z=9$
14. $x=4$, $y=10$, $z=14$
15. $x=8$, $y=12$, $z=20$
16. $x=3$, $y=4$, $z=5$
17. $x=3$, $y=4$, $z=2$
18. $x=2$, $y=8$, $z=5$

19. $x=3;\ y=5;\ z=7$
20. $x=\frac{2}{5};\ y=\frac{4}{5};\ z=1$

Example 63

1. $x=2$, $y=3$, $z=4$
2. $x=1$, $y=2$, $z=3$
3. $x=2$, $y=3$, $z=4$
4. $x=2$, $y=3$, $z=4$
5. $x=3$, $y=2$, $z=1$
6. $x=5$, $y=2$, $z=1$
7. $x=4$, $y=3$, $z=2$
8. $x=4$, $y=5$, $z=6$
9. $x=7$, $y=5$, $z=3$
10. $x=1$, $y=-2$, $z=3$
11. $x=2$, $y=3$, $z=4$
12. $x=1$, $y=2$, $z=3$
13. $x=3$, $y=2$, $z=1$
14. $x=3$, $y=2$, $z=1$
15. $x=4$, $y=5$, $z=6$
16. $x=2$, $y=3$, $z=4$
17. $x=1$, $y=-2$, $z=3$
18. $x=2$, $y=3$, $z=7$
19. $x=2$, $y=3$, $z=4$
20. $x=7$, $y=5$, $z=3$
21. $x=1$, $y=2$, $z=3$
22. $x=1$, $y=3$, $z=5$
23. $x=3$, $y=4$, $z=2$
24. $x=2$, $y=8$, $z=5$
25. $x=2$, $y=3$, $z=1$
26. $x=4$, $y=6$, $z=8$
27. $x=3$, $y=4$, $x=5$
28. $x=-2$, $y=-3$, $z=-5$
29. $x=3$, $y=5$, $z=7$
30. $x=2$, $y=4$, $z=5$
31. $x=2$, $y=3$, $z=4$
32. $x=2$, $y=3$, $z=4$
33. $x=3$, $y=2$, $z=1$
34. $x=3$, $y=2$, $z=1$

Example 64

1. $x=\pm 3$, $y=\pm 4$, $z=\pm 5$

2. $x=\dfrac{1}{(b-c)(a-c)}$, $y=\dfrac{1}{(a-b)(c-b)}$, $z=\dfrac{1}{(c-a)(b-a)}$

3. $x=\dfrac{a}{2}$, $y=\dfrac{b}{2}$, $z=\dfrac{c}{2}$

4. $x=\dfrac{2}{a+b-c}$

5. $x=\dfrac{2abc}{ab+ac-bc}$

6. $x=\dfrac{c(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$

$y=\dfrac{2}{a-2+c}$ $\quad y=\dfrac{2abc}{bc-ac+ab}$ $\quad y=\dfrac{c(a^2+b^2)}{2ab}$

$z=\dfrac{2}{b+c-a}$ $\quad z=\dfrac{2abc}{bc+ac-ab}$

7. $x=5$, $y=3$, $z=1$

8. $x=2$, $y=4$, $z=6$

9. $x=12$, $y=10$, $z=8$

10. $x=\dfrac{b(2a-b)}{a-b}$, $y=\dfrac{a(2b-a)}{b-a}$

11. $x=\dfrac{a^2bc}{(b-a)(c-a)}$, $y=\dfrac{ab^2c}{(b-a)(b-c)}$, $z=\dfrac{abc^2}{(c-b)(c-a)}$

12. $x=5$, $y=3$, $z=1$

13. $x=4$, $y=5$, $z=6$

14. $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{4}$

15. $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{4}$, $z=\frac{1}{5}$

16. $x=1$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{2}$

17. $a=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{4}$

18. $x=5$, $y=11$, $z=17$

19. $x=\dfrac{kbc}{(a-b)(a-c)}$, $y=\dfrac{kca}{(b-a)(b-c)}$, $z=\dfrac{kab}{(c-b)(c-a)}$

20. $x=abc$, $y=ab+bc+ca$, $z=a+b+c$

21. $x=5$ $y=3$ $z=1$

22. $x=\dfrac{2bc}{b+c}$, $y=\dfrac{2ca}{c+a}$, $z=\dfrac{2ab}{a+b}$

23. $x=\pm5$, $y=\pm6$, $z=\pm5$

24. $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\pm\frac{1}{3}$, $z=\pm\frac{1}{4}$

25. $x=1$, $y=2$, $z=3$

26 $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{4}$, $z=\frac{1}{5}$

27. $x=2$, $y=4$, $z=6$

28. $x=\pm2$, $y=\pm3$, $z=\pm4$

29. $x=\pm1$ 3. $x=\pm2$ 31. $x=1\dfrac{bc}{\sqrt{bc\cdot ca+ab+}}$ etc 32. $x=13$
$y=\pm3$ $y=\pm4$ $y=8$
$z=\pm4$ $z=\pm6$ $z=9$

33. $x=\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$, $=\dfrac{1}{(a-c)(a-b)}$, $z=\dfrac{1}{(c-b)(a-b)}$

34. $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$ 35. $x=\dfrac{abc(bc-ac-ab)}{b^2c^2-a^2c^2-a^2b^2}$, $y=\dfrac{abc(bc+ab-ac)}{b^2c^2+a^2b^2-a^2c^2}$

36. $x=\dfrac{12}{7}$, $y=\dfrac{12}{5}$, $z=-12$

Example 65

1. 50 और 30 2. 47 वर्ष और 31 वर्ष 3. 36 4. 32 5. 72 6. 23 7. 84
8. 305 9. 45 साल और 15 साल 10 $A=63$ वर्ष $B=35$ वर्ष 11. 73
12. $\frac{7}{8}$ 13. 18, 36 14. 40 दिन, 60 दिन 15. 60 वर्ष, 20 वर्ष
16. 35 साल, 15 साल 17. 24 18. 69 19. $\frac{3}{5}$ 20. $\frac{3}{8}$ 21. $\frac{5}{9}$
22. $\frac{7}{16}$ 23. $\frac{64}{135}$ 24. $23\frac{1}{3}$ दिन 25. $A-3$ मील $B-4\frac{2}{7}$ मील

Example 66

1. 36 2. $\frac{1}{100}$ 3. 36 4. 81 5. $\dfrac{1}{a^6}$ 6. $\dfrac{b^{\frac{5}{8}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ 7. ab^6

8. a^8b^6 9. $\dfrac{y^4}{x^{18}}$ 10. $x^{\frac{5}{32}}$ 11. $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}}{b}$ 12. y 13. $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$

14. $\dfrac{b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{1}{6}}}{a}$ 15. $\dfrac{c^{\frac{5}{8}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{3}}}$ 16. $\dfrac{1}{a^{46}b^{82}}$ 17. $a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}$ 18. $a-b$

19. $1+a^2b^{-2}+a^4b^{-4}$ 20. $x^{-2}+x^{-1}+y^{-1}+y^{-2}$ 21. $x-2x^{\frac{1}{2}}$
$+1$ 22. $a^{4m}-9b^{2n}+12b^nc^p-4c^{2p}$ 23. $x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{4}{3}}$

24. $x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{2}{3}}$ 25. $x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{15}{8}} \cdot a^{\frac{3}{8}} + x^{\frac{9}{8}}a^{\frac{3}{8}} - x^{\frac{3}{5}}$ $a^{\frac{15}{8}} + a^{\frac{3}{4}}$ 26. $x^{n/2}a^{n/2} + a^{n}$ 27. (i) $x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{5}{4}}y^{-\frac{1}{4}} + xy^{-\frac{1}{2}}$ (ii) $x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{5}{6}} + 4x + 2x^{\frac{7}{6}} - 4x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{3}}$ (iii) $x + x^{-1} - 2(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} + 3$ 28. 1 29. x^{-b^2} 30. 1 31. a^{m-1}.

Example 67

1. $x^{2(a^3+b^3+c^3)}$ 2. 1 3. 1 4. xyz 5. 1 6. x^3 7. 1 8. 1 9. 1 10. 1 11. $\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}\right)$ 12. $\frac{1}{\sqrt[6]{24}}$ 13. $\frac{2}{3}$ 14. a^4b^3

25. $m = b$ या $\frac{1}{b}$

Example 68

1. $\frac{2}{3}$ 2. 7 3. 2 या 3 4. 3 5. 5 6. 2 7. $\frac{b+d}{a+c}$ 8. 3 9. -4

10. 0 11. 3 12. -3 13. $\frac{1}{2}$ 14. $a = 4$, $y = 2$ 15. $x = 2$, $y = 3$ 16. $x = 2$, $y = 3$

17. $x = 1$, $y = 2$ 18. $x = 2$ या $-\frac{1}{2}$, $y = 4$ 19. $x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}$, $y = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}$ 20. $x = 2$, $y = 3$

21. $x = 3$, $y = 2$ 22. $x = 2$, $y = 3$ 23. x 4, $y = 2$ 27. $m = n^{\frac{1}{n-1}}$ 37. $\frac{208}{46}$

Example 69

1. $\sqrt{45}$ 2. $\sqrt[3]{24}$ 3. $\sqrt[4]{96}$ 4. $\sqrt[4]{1280}$ 5. $\sqrt[n]{a^n b}$ 6. $\sqrt[a]{x^{3a}y}$
7. $\sqrt[5]{a^{20}b^3}$ 8. $\sqrt[3]{128}$ 9. $\sqrt[5]{729}$ 10. $\sqrt[3]{x^1 x b}$
11. $5\sqrt{2}$ 12. $2\sqrt[3]{5}$ 13. $3\sqrt[3]{-4}$ 14. $2\sqrt[6]{2}$ 15. $5\sqrt[3]{2}$
16. $3\sqrt[4]{5}$ 17. $7\sqrt[3]{4}$ 18. $x\sqrt[4n]{a}$ 19. $4ab\sqrt{-3b}$
20. $5a^2x^2\sqrt{4a}$ 21. $3\sqrt{3}$ 22. $65\sqrt{2}$ 23. $7\sqrt{2}$ 24. $8\sqrt{5}$
25. $\sqrt{2}$ 26. $5\sqrt{5}$ 27. $\sqrt[4]{3}$ 28. $3\sqrt{3}$ 29. 0 30. 0
31. $17\sqrt[3]{2}$ 32. $(7x+y)\sqrt{5x}$

Example 70

1. $\sqrt[6]{27}$ और $\sqrt[3]{4}$ 2. $\sqrt[12]{256}$ और $\sqrt[12]{27}$ 3. $\sqrt[15]{15625}$ और $\sqrt[15]{27}$
4. $\sqrt[15]{8}$ और $\sqrt[15]{243}$ 5. $\sqrt[6]{125}$ और $\sqrt[6]{81}$ 6. $\sqrt[30]{2^{10}}$, $\sqrt[30]{6^{15}}$, $\sqrt[30]{3^6}$ 7. दूसरी 8. पहलो 9. पहली 10. पहली 11. पहली 12. पहली
13. $a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$ 14. $6a-10\sqrt{a}$ 15. $16x-9y$ 16. $5x-54$
17. $7+4\sqrt{6}$ 18. $5+3\sqrt[3]{12}+3\sqrt[3]{18}$ 19. $2x-2\sqrt{x^2-a^2}$
20. $182+80\sqrt{3}$ 21. $83+12\sqrt{35}$ 22. $2a^2-2\sqrt{a^4-4b^4}$
28. $29x^2-21y^2+20\sqrt{x^4-y^4}$ 24. $4x+9y+12\sqrt{xy}$ 25. $x+y+z+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}+2\sqrt{xy}$ 26. पहली 27. दूसरो

Example 71

1. $4+4\sqrt{3}$ 2. $\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$ 3. $\dfrac{14-5\sqrt{3}}{11}$ 4. $\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$
5. $\dfrac{23-3\sqrt{21}}{10}$ 6. $5+2\sqrt{6}$ 7. $24+17\sqrt{2}$ 8. $9+2\sqrt{15}$
9. $\dfrac{a+\sqrt{x^2-x^2}}{x}$ 10. $x^2-\sqrt{x^4-1}$ 11. $\dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

12. $2\sqrt{3}-\sqrt{6}$ **13.** $\dfrac{6\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{3}$ **14.** 4 **15.** 1

16. $4x\sqrt{x^2-1}$ **17.** $2a$ **18.** 1 **19.** $\dfrac{4\sqrt{2}-3-\sqrt{3}}{2}$

20. $\dfrac{14\sqrt{2}+3\sqrt{3}+5}{2}$ **21.** $\sqrt{5}(1+\sqrt{2})$ **22.** $2+\sqrt{3}$

23. $\frac{1}{3}(\sqrt{30}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ **24.** 198 **25.** (i) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$
(ii) $\sqrt{\frac{25}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}$ (iii) $4\cdot\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{3}-1$ (v) $2+\sqrt{3}$
(vi) $3-\sqrt{2}$ (vii) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (viii) $3-\sqrt{5}$ (ix) $5+\sqrt{3}$
(x) $2\sqrt{11}+\sqrt{3}$ (xi) $\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$ (xii) $\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}$
(xiii) $\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1)$ (xiv) $\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}-1)$ (xv) $\sqrt[4]{3}(\sqrt{2}+1)$
26. (i) 5·828 (ii) 6·464 (iii) 5·414 (iv) 3·650
(v) 6·854 (vi) 0·504 (vii) 5·076 (viii) 5·414
(ix) 22·180 (x) 4·236 **27.** $\sqrt{2}$ **30.** (ii) 7 (iii) 7
(iv) $20+2\sqrt{15}$ (v) $6\sqrt{6}$ **31.** $1\frac{2}{38}$ **32.** $\dfrac{4a^2-1}{4a^2-3}$

Example 72

1. (i) a^3 (ii) a^8 (iii) ab^2 (iv) $x^2y^3z^4$
(v) $\dfrac{5}{7}$ $\dfrac{xy^2}{z}$ **2.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ **3.** $x+2b$ **4.** $5xy-4$
5. $7ax^2-3b^2$ **6.** $7a^3b^4+9a^4b^3$ **7.** $\frac{1}{2}x^3y^2-\frac{1}{5}b^2y^3$ **8.** $a+b+c$
9. $-a+b-c$ **10.** $2a-b-3c$ **11.** $-a-2b+3c$
12. $x-2-\dfrac{1}{x}$ **13.** $x^2+1+\dfrac{1}{x^2}$ **14.** $\dfrac{x}{a}+1+\dfrac{a}{x}$
15. $\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{y}{x}$ **16.** $\dfrac{3x}{a}-1+\dfrac{a}{3x}$ **17.** $x+2+\dfrac{1}{x}$

18. $a^{\sqrt{2}} - a^{-\sqrt{2}}$ 19. $a^2 + b^2$ 20. $ab - bc + ac$ 21. $x^2 + 3x + 1$ 22. $x^2 - 3x + 1$ 23. $x^2 + 5x + 5$ 24. $x^2 + 7x + 8$ 25. $x^2 - 8x + 11$ 26. $4x^2 + 16x + 11$ 27. $x - 7 + \frac{1}{2x}$

28. $\frac{x}{y} + 1 - \frac{y}{x}$ 29. $a = 1$ 30. $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$ 31. $x^2 + 10x + 20$ 32. $x^2 + 8x + 13$ 33. $(x+1)(x+2)(x+3)$ 34. $x^2 - 8x + 11$ 35. $a^2 + a + \frac{1}{2}$ 36. $2x^2 - 3x^{-1} + 4x^{-4}$ 37. $c = 1.$

Example 73

1. $2xz + 3y$ 2. $x^2 - 2x + 3$ 3. $x^2 - x + 1$ 4. $2x^2 - 3x + 4$ 5. $2x^2 + 2ax + 4b^2$ 6. $3x^2 - \frac{xy}{3} + 3y^2$ 7. $x^2 + x + \frac{1}{4}$ 8. $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ 9. $\frac{a^2}{2} + \frac{a}{x} - \frac{x}{a}$ 10. $\frac{a}{2b} - 1 - \frac{2b}{a}$ 11. $\frac{2a}{3} - \frac{1}{5} + \frac{2x}{3a}$ 12. $\frac{x}{y} - \frac{1}{2} - \frac{y}{z}$ 13. $x - x^{\frac{1}{2}} + 1$ 14. $x^{\frac{5}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{6}}$ 15. $ax^{-1} + 1 - a^{-1}x$
16. $x^2 + 2x - 3$ 17. $x^2 - 2x + 1$ 18. $x^2 + 2x + 3$ 19. $x^2 + 3x + 2$ 20. $x^2 - 3x + \frac{1}{3}$ 21. $\frac{a^2}{3} - a + \frac{1}{2}$ 22. $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{a}{3}$ 23. $3x - 4 + \frac{1}{2x}$ 24. $\frac{3x}{a} - 1 + \frac{a}{3x}$ 25. $\frac{a}{x} + 1 - \frac{x}{a}$ 26. $x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}$ 27. $x^2 - 3 - \frac{1}{x^2}$ 28. $2x^2 + 5 - \frac{7}{x^2}$ 29. $\frac{x}{y} - 3 - \frac{y}{x}$ 30. $\frac{y}{x} - \frac{x}{y} + \frac{1}{2}$ 31. $x^{\frac{5}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}$ 32. $x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{6}}$ 33. $3x + x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}}$
34. (i) $a = 1$ (ii) $a = 9$ (iii) $a = 41$ (iv) $a = 24$

(v) $a=16$ 35. $2-x^{-1}+x^{-2}$ 36. $\frac{x}{y}-\frac{1}{2}-\frac{y}{2x}$ 37. (i) 4 (ii) 6 (iii) 2 (iv) 16 (v) 12 38. (i) 10 (ii) $\frac{4}{3}$ (iii) 8 39. $2x^{2}-3x^{-1}+4x^{-4}$ 40. $x^{2}+3x+1+\frac{1}{x}$

Example 76

1. $\frac{4}{25}$ या $\frac{1}{9}$ 2. $\frac{19\pm\sqrt{91}}{26}$ 3. $3\pm\sqrt{6}$ 4. $\sqrt{\frac{3\pm 5}{2}}$
5. 3 या $\frac{1}{2}$ 6. ± 2 या $\pm\sqrt{13}$ 7. $\frac{1}{5}$ या $\frac{1}{2}$ 8. -3 या 4
9. 27 या 64 10. 0 या 1 11. 1 या $-\frac{1}{2}$ 12. 2 या 0
13. 2 या -2 14. 4 या -4 15. 1 या 2 16. 0 या -3
17. $2, -3, \frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$ 18. $0, -1$ या $\frac{-1\pm\sqrt{57}}{2}$ 19. $\frac{-3}{2}$ $\frac{-3\sqrt{10}}{2}$ 20. $1, -2 \frac{-1\pm\sqrt{65}}{2}$ 21. $0, 3, \frac{3\pm\sqrt{20}}{2}$
22. $1, \frac{-4\pm\sqrt{7}}{3}$ 23. 2 या $\frac{1}{2}$ या $\frac{-9\pm\sqrt{65}}{4}$

Example 77

1. 1 या $\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$ 2. 2 या $\frac{1}{2}$ या 3 या $\frac{1}{3}$ 3. $-1, 3, \frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ 4. 1, 5 या $\frac{1}{5}$ 5. $-2, -\frac{1}{2} \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
6. $1, 2, 3, \frac{3}{2}$ 7. $-3, -\frac{1}{3}, 5\pm\sqrt{24}$ 8. $2, -\frac{1}{2}, 4, -\frac{1}{4}$
9. $2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}$ 10. $3, -\frac{1}{3}, 4, -\frac{1}{4}$ 11. $3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}$ 12. $-1, -2, -\frac{1}{2}, \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 13. $1, 6, -2, -3$ 14. $1, 2, -\frac{1}{2}$ 15. 5
16. $2, 3, \frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2}$

Example 78

1. 4 या $-\frac{1}{3}$ 2. 4 या $-2\frac{4}{5}$ 3. $-\frac{3}{4}$ 4. 4 5. 12 6. 5
7. $\frac{a-b}{2}$ 8. 0, 5, $\frac{1}{2}$, $-4\frac{1}{2}$ 9. 20 10. 2 11. $\pm\frac{5}{2}$
12. 1 13. a या b 14. $\frac{p}{2}$, $\frac{3q}{2}$ 15. $\pm\frac{5a}{3\sqrt{3}}$ 16. 3 या -10
17. -2 या $3\frac{2}{3}$ 18. 2 या $-2\frac{4}{5}$ 19. -1 या $4\frac{1}{2}$
20. 1, 2, $\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ 21. -3, $\frac{5}{3}$, $-\frac{2\pm\sqrt{70}}{3}$ 22. 3, 0, 5, $\frac{5\pm\sqrt{45}}{2}$ 23. 3, $-2\frac{1}{3}$, $\frac{1\pm\sqrt{37}}{3}$ 24. 3 या $-3\frac{1}{2}$ 25. 6

Example 79

1. पहला 2. तीसरा 3. चौथा 4. दूसरा 5. दूसरा 6. तीसरा
7. पहला 8. पहला 9. तीसरा 10. दूसरा 11. पहला 12. पहला
13. दूसरा 14. तीसरा 15. पहला 16. पहला 17. पहला 18. दूसरा

Example 83

1. 2·5750313 2. $\overline{2}$·748188 3. 1·2342640 4. 4·593286
5. 1·0293786 6. $\overline{3}$·544068 7. (i) 30 (ii) 20 (iii) 16 (iv) 9 (v) 11 8 (i) 301 (ii) 24 (iii) 12 (iv) 19 9. 0·887904
10. (i) 0·312936 (ii) 2·425805 11. (i) $\overline{1}$·90309 (ii) $\overline{3}$·7441213 (iii) $\overline{1}$·4650389 12. ·61837211 13. ·04844544 14. (i) 1·320461 (ii) 1·197342 15. 4·5527375; 1·5527394 16. ·008287771

Example 84

1. ·6870417 2. ·8455104 3. 27° 53′ 23·7″ 4. 9·7830545
5. 12° 39′32″ 6. 10·2714039 7. 10·6132960 8. 10·0229414
9. 10·5922740 10. 4·3993263 11. ·7928863 12. 56° 47′ 20·7″
13. 53° 13′ 5·11″ 14. 10·1912872 15. 10·1680869.

Secondary & Higher Secondary Board Questions

S. S. 1963 A

1. लघुतम पदों में प्रकट कीजिये—

$$\frac{x^5+5x^4+8x^3+4x^2}{x^5+x^4+8x^2+8x}$$

अथवा

$a+b+\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}$ को $a-b+\dfrac{b^2}{a}-\dfrac{a^2}{b}$ से गुणा कीजिये ।

2. किन्हीं दो का गुणनखंड निकालिये—

(i) $x^4-x^2y^2+y^4$ (ii) $(a^2+1)y^4-y^2-a^2$

(iii) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

अथवा, यदि $x+y+z=15$, $xy+xz+yz=75$, तो $x^3+y^3+z^3-3xyz$ का सांख्यिक मूल्य निकालियें ।

3. किसी एक को हल कीजिये—

(i) $(x-a)(x-b)=(x-a-b)^2$

(ii) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+a}=\dfrac{2}{x+b}$

(iii) $3x-7y=0$ $\quad x+y+3=0$

अथवा, यदि $a^2=b+c$, $b^2=c+a$, $c^2=a+b$; तो दिखलाइये कि

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$$

अथवा, यदि $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16$ एक पूर्ण वर्ग है—इसको सिद्ध कीजिये

4. यदि $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$ तो साबित कीजिये कि

$$\frac{a}{d}=\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}$$

अथवा, दो लगातार (*Consecutive*) विषम (*odd*) संख्याओं के वर्गों का योगफल 802 है, तो वे विषम संख्याएं क्या हैं ? मालूम करें ।

S. S. 1963 S

1\. यदि $\frac{1}{b^3(a-c)}+\frac{1}{a^3(b-c)}=\frac{1}{ab(a-c)(b-c)}$, तो सिद्ध करें कि

$$a^2+b^2=ab \text{ या } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$$

अथवा; महत्तम समापवर्त्तक निकालिये—

$$x^2+5x+6 \text{ और } x^2+7x+10$$

2\. किन्हीं दो का गुणनखंड निकालिये—

(i) $14x^2-37x+5$ (ii) $x^2+(a+b+c)x+ab+ac$

(iii) $a^3-b^3+3ab+1$

अथवा, यदि $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, तो सिद्ध कीजिये कि

$$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$$

3\. हल कीजिये—

$$\frac{a-b}{x-a}+\frac{a-b}{x-b}=\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x-b}$$

अथवा, वर्गमूल निकालिये $-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$

4\. सरल कीजिये— $\left\{\sqrt[3]{4}\times\frac{1}{\sqrt[6]{8}}\times\sqrt[12]{2^{-1}}\right\}^{\frac{1}{4}}$

अथवा, दो संख्याओं का योगफल 80 है, बड़ी संख्या छोटी संख्या के चार गुणा से 5 अधिक है, तो दोनों संख्याओं को निकालिये ।

S. S. 1964 A

1\. सरल कीजिये— $\frac{b}{a+b}-\frac{ab}{(a+b)^2}-\frac{ab^2}{(a+b)^3}$

अथवा, x^3-5x+6, x^2-4x+3 और x^2-3x+2 का लघुतम समापवर्त्य निकालिये।

2. किन्हीं दो का गुणनखंड निकालिये—

(i) $81x^8-7x^4y^4+y^8$ (ii) $x^3-y^3+3y^2-3y+1$

(iii) $x^2+2xy-a^2-2ay$

अथवा, यदि $4x^4-12x^3+25x^2-24x+a$ पूर्ण वर्ग हो, तो a का मूल्य निर्धारण करें।

3. किसी एक को हल कीजिये—

(i) $\frac{x}{3}+\frac{3}{6-z}=\frac{2(6+x)}{15}$

(ii) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+1=\frac{x}{5}=23$ (iii) $15x^2-28=x$

अथवा, $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-l}\times\left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l-m}\times\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m-n}$

को सरल कीजिये।

4. 10 और 100 के बीच की कोई संख्या अपने अंकों के योग को आठ गुणी है, यदि संख्या में से 45 घटा लिया जाय, तो अंकों का स्थान बदल जाता है। संख्या मालूम कीजिये।

अथवा, यदि $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$, तो सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{x^3+y^3+y^3z^3}{a^3+b^3+c^3}=\frac{xyz}{abc}$$

S. S. 1964 S

1. साबित करें कि

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}=0$$

यदि $xy+yz+zx=0$

अथवा, महत्तम समापवर्त्तक निकालें—

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 3 \text{ और } x^3 + 8x^2 + 21x + 18$$

2. निम्नलिखित में से किन्हीं दो का गुणनखंड निकालिये—

(i) $a^2(b + c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

(ii) $p^2 + 2pq + b^2 - qp$ (iii) $x^4 + x^2y^2 + y^4$

अथवा, वर्गमूल निकालिये—

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\frac{3}{4}$$

3. साबित कीजिये कि $a^2 + 4b : b^2 = b^2 + bc : c^2$ यदि a; b, c, लगातार समानुपात में हों।

अथवा, किसी एक को हल कीजिये —

(i) $\frac{5}{3 - 4x} + \frac{9}{4x + 13} = \frac{4.}{4x + 5}$ (ii) $5x^2 - x - 6 = 0$

4. $p + \frac{1}{p} + 2 = 0$, तो

$p + 1 + \frac{1}{p}$, $p - 1 + \frac{1}{p}$ और $p^2 - 1 + \frac{1}{p}$ को लगातार गुणा करें। तथा गुणनफल का मूल्य ज्ञात करें।

अथवा, पिता तथा पुत्र की वर्त्तमान उम्रों का अनुपात 5 : 3 है। चार वर्ष पहले पुत्र की जितनी उम्र थी, चार वर्ष के बाद पिता की उम्र उसकी तिगुनी हो जायगी। पिता और पुत्र की वर्त्तमान उम्रों को ज्ञात करें।

S. S. 1965 A

1. यदि $a + b + c = 0$, तो सिद्ध करें कि

$$a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 = c^2 + ca + a^2$$

अथवा, $3x^3 + 5x^2 + 5x + 2$ और $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$ का म० स० निकालें।

2. किन्हीं दो का गुणनखंड निकालें—

(i) $4x^4 + 81$ (ii) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$ (iii) $a^2 + ac - b^2 - bc$

अथवा, 'm' का मूल्य निकालें जिससे

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + m \text{ पूर्ण वर्ग हो ।}$$

3. किसी एक को हल करें—

(i) $x^2 + 9x - 52 = 0$

(ii) $\frac{1}{5x} + \frac{y}{9} = 5$

$\frac{1}{3x} + \frac{y}{2} = 14$

अथवा, यदि $x = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ और $y = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, तो

$\frac{x - y}{x + y}$ का मूल्य निकालें ।

4. यदि $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, तो सिद्ध करें कि

$$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$$

अथवा, एक बाँस का $\frac{1}{4}$ हिस्सा कीचड़ में, $\frac{1}{3}$ हिस्सा पानी में, और 10 फु० पानी के ऊपर है, तो बाँस की लम्बाई निकालें ।

S. S. 1965 S

1. यदि $2s = a + b + c$, तो सिद्ध करें कि

$$(s - a)^2 + (s - b)^2 + (s - c)^2 + s^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

अथवा, $6x^2 - 11x + 3$, $4x^2 - 4x - 3$ और $6x^2 + 26x - 9$ का ल० स० निकालें ।

2. किन्हीं दो का गुणनखंड निकालें—

(i) $a^4 - 81b^4$ (ii) $a^4 + a^2b^2 + b^4$ (iii) $xb - ac - xc + ab$

अथवा, $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{7}{4}$ का वर्गमूल निकालें ।

3. किसी एक को हल करें—

(i) $6x^2 + 5x - 4 = 0$

(ii) $\frac{3}{y} - \frac{1}{x} = 1$

$\frac{2}{5x} + \frac{5}{2y} = 7$

अथवा, सरल करें— $\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l^2 + lm + m^2}$

$\times \left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m^2 + mn + n^2} - \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n^2 + nl + l^2}$

4. यदि $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, तो सिद्ध करें कि

$(a + d)(b + c) - (a + c)(b + d) = (b - c)^2$

अथवा, दो अंकवाली एक संख्या के अंकों का योगफल 9 है, अगर 9 उस संख्या में जोड़ा जाय तो संख्या के दोनों अंक उलट जाते हैं। तो संख्या निकालें।

S. S. 1966 A

1. यदि $x = a^2 + b^2$, $y = a^2 - b^2$, तो

$\frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y}$ का मूल्य निकालें ।

अथवा, $a^2 + ab + bc + ca$, $b^2 + bc + ca + ab$ जौर $c^2 + ab + bc + ca$ का ल० स० निकालें ।

2. किन्हीं दो का गुणनखंड निकालें—

(i) $x^6 - 1$ (ii) $2(a + b)^2 + 3(a + b) - 2$ (iii) $x(x - 1)(x - 2) - 3x + 3$

अथवा a का मूल्य निकालें ताकि $4x+8x^{\frac{1}{3}}+4x^{-\frac{1}{3}}4x^{-1}+x^{-2}$ $+a$ पूर्ण वर्ग हो जाय।

3. किसी एक को हल करें—

(i) $x+2-\dfrac{6}{x+2}=1$

(ii) $\dfrac{4}{x}+\dfrac{10}{y}=2$

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}$$

अथवा, सरल करें— $\left\{(a^{m})^{m-\frac{1}{m}}\right\}^{\frac{1}{m+1}}$

4. यदि $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$, तो सिद्ध करें कि

$$\frac{a}{d}=\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}$$

अथवा, आज से 20 वर्ष पूर्व पिता की उम्र पुत्र की उम्र से चार गुनी थी और आज से 4 वर्ष बाद पिता उम्र पुत्र को उम्र से दुगुनी हो जायगी, तो पिता और पुत्र की वर्त्तमान उम्र निकालिये।

S. S. 1966 S

1. $1+x+y$, $1-x+y$, $1+x-y$ और $x+y-1$ का लगातार गुणनखण्ड प्राप्त कीजिये।

अथवा, x^5-x^3+8 तथा x^5-x^2+4 का महत्तम समापवर्त्तक निकालिये।

2. निम्नलिखित में से किन्हीं दो का गुणनखंड निकालिये—

(i) $16a^4-81$

(ii) $(x^2+2x)^2-3(x^2+2x)-18$

(iii) $x^3+x^2+10a+3$

अथवा, वर्गमूल निकालें— $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}+2\right)+12$

3. किसी एक समीकरण को हल कीजिये—

(i) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{25}{12}$

(ii) $\frac{2}{x}+\frac{7}{y}=29$

$\frac{5}{x}-\frac{6}{y}=2$

अथवा, अगर $\sqrt{2}=1{\cdot}41x2\cdots$ तथा $\sqrt{3}=1{\cdot}7320\ldots$ तो $\frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{}}$ का मूल्य प्राप्त कीजिये।

4. अगर $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ तो साबित कीजिए कि

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$$

अथवा, यदि दो व्यक्तियों की उम्र का फर्क 10 वर्ष है और 15 वर्ष पहले बड़े की उम्र छोटे की उम्र की दुगुनी थी तो उनकी उम्र निकालिये।

S. S. 1967 A

1. $x^3+6x^2+11x+6$ और x^2+6x+8 का महत्तम समापवर्त्तक निकालें।

अथवा, यदि $bx=ay$, तो सिद्ध करें कि

$$(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2$$

2. किन्हीं दो का गुणनखण्ड निकालें—

(i) x^2+3x-y^2-3y (ii) $x^3-6x^2+11x-6.$

(iii) $(x^2-4x)^2-4(x^2-4x)-5$

अथवा, $x^4\frac{1}{16}+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x-2x^3$ का वर्गमूल निकालें।

3. किसी एक को हल करें —

(i) $\frac{ax}{a+x}+\frac{bx}{b+x}=a+b$ (iii) $\frac{2}{y}-\frac{1}{x}=1$

$\frac{2}{5x}+\frac{5}{2y}=7$

(ii) $3x(-17x+2y)=0$

अथवा, यदि $x=a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}$, तो सिद्ध करें कि

$$x^3+3x=a-\frac{1}{a}$$

4. यदि $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$, तो सिद्ध करें कि

$$(a+b)(b+c)-(a+c)(b+d)=(b-c)^2$$

अथवा, 20 वर्ष पूर्व एक व्यक्ति की उम्र उसके पुत्र की उम्र से पाँच गुणी थी, यदि 16 वर्ष बाद उसके पुत्र की उम्र 41 वर्ष हो जायगी तो पिता की वर्त्तमान उम्र क्या होगी ?

S. S. 1967 S

1. यदि $x=\frac{a}{a+b}$ और $y=\frac{b}{u+b}$, तो सिद्ध करें कि

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

अथवा, $3x^2-10x-8$, $4x^2-20x+9$ और $6x^2+x-2$ का लघुतम समापवर्त्य निकालें ।

2. किन्हीं दो का गुणनखंड निकालें—

(i) x^2-x-12 (ii) $3a^3-81b^3$ (iii) $a^2-b^2+4bc-4c^2$

अथवा, 'a' का मूल्य निकालें ताकि $16a^4-8x^3+ax^3-10x+25$ पूर्ण वर्ग हो जाय ।

3. किसी एक को हल करें—

(i) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$

(ii) $4x^2-16x+15-0$ (iii) $17x-7y=52,\ 3=2y$

अथवा, यदि $\sqrt{2}=1\cdot414$ और $\sqrt{5}=2\cdot236$, तो $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ का मूल्य निकालें ।

4. यदि $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$, तो सिद्ध करें कि $(a+b)(c+d)$
$=(b+c)^2$

अथवा, पिता तथा पुत्र की उम्र का योगफल 80 साल है, और पुत्र की उम्र का दुगुना पिता की उम्र से 10 वर्ष अधिक होता है, तो दोनों की उम्र निकालें ।

Higher Secondary 1963 A

1. किन्हीं दो का गुणनखंड निकालिये—

(i) $x^3-y^3+6xy+8$ (ii) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

(iii) $a^2-y^2-z^2+2yz+x+y-z$

2. नीचे लिखे समीकरणों में से किसी एक को हल कीजिये—

(i) $\frac{1}{5x}+\frac{y}{9}=5$ (ii) $2x^2-x=210$

$\frac{1}{3x}+\frac{y}{2}=14$

3. यदि $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$, तो सिद्ध कीजिये कि

$$(a^2b+{}^2):\frac{a^3}{a+b}::(p^2+q^2):\frac{p^3}{p+q}$$

अथवा, यदि $x=3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}$, तो सिद्ध कीजिये कि $3x^2-9x-10=0$

4. यदि $8x^{\frac{1}{2}}+4x+4x^{-1}+4x^{-\frac{1}{2}}+x^{-2}+a$ एक पूर्ण वर्ग हो तो a का मान बताइये ।

अथवा, रेखा-चित्र से निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिये—

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$3x + 4y = 3$$

H. S. 1963 S

1. नीचे समीकरणों में से किसी एक को हल कीजिये —

(i) $15x^2 - 28 = x$ (ii) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{3}{x-3}$

अथवा, वर्गमूल निकालिये $\frac{a^4}{9} - \frac{2}{3}a^3 + \frac{3}{4}a^2 - a + \frac{1}{4}$

2. यदि $\frac{a}{b} = \frac{b}{e} = \frac{c}{d}$, तो साबित कीजिये कि $\frac{a-b}{b+c} = \frac{b+c}{c+d}$

अथवा, किन्हीं दो के गुणनखंड निकालिये—

(i) $4ab - 2a^2 - 2(b^2 - 1)$ (ii) $x(x+2)(x+4)(x+6) + 7$
(iii) $x^3 - 3x + 2$

3. 10 वर्ष पहले पिता की उम्र पुत्र की उम्र से पांच गुनी थी किन्तु 20 वर्ष बाद पिता का उम्र पुत्र को उम्र से केवल दुगुनी रहेगी। पिता और पुत्र की वर्त्तमान उम्र निकालिये।

अथवा, $4x^2 - 5x + 1$ और $6x^3 - 6x^2 + 2x - 2$ का म० स० निकालिये।

4. सरल करें—

$$\left(\frac{x^{b+c}}{x^{c-a}}\right)^{\frac{1}{a+b}} \times \left(\frac{x^{c+a}}{x^{a-b}}\right)^{\frac{1}{b+c}} \times \left(\frac{x^{a+b}}{x^{b-c}}\right)^{\frac{1}{c+a}}$$

अथवा, रेखा-चित्र द्वारा निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिये—

$$3x - 4y = 2$$
$$x + y = 10$$

H. S. 1964 A

1. किन्हीं दो का गुणनखंड निकालिये—

(i) $x^2 + 2x - 323$ (ii) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$
(iii) $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc + a - b - c$

अथवा, म० स० निकालिये—

$6x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 2x$ और $4x^5 - 18x^4 - 8x^3 - 10x^2$

2. निम्नलिखित समीकरणों में से किसी एक को हल कीजिये—

(i) $\frac{x}{1+x} + \frac{x+1}{x} = \frac{25}{12}$ (ii) $x + y = 2xy$, $x - y = xy$

(iii) $\frac{2}{2x-5} + \frac{1}{x-3} = \frac{6}{3x-1}$

3. यदि $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, तो सिद्ध कीजिये कि

$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + c^2 + b^2$$

अथवा, रेखा-चित्र द्वारा हल कीजिये—

$$\frac{2x+7}{3} = \frac{3x-7}{2}$$

4. दो अंकों की एक संख्या है। अंकों का योगफल 6 है। अंकों के उलट जाने से जो नयी संख्या बनती हैं, वह पहली संख्या का $\frac{7}{4}$ गुना है, तो पहली संख्या निकालिये।

अथवा, सिद्ध किजिये—

$$\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}} + \frac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}} + \frac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}} = 1$$

H. S. 1964 S

1. निम्नलिखित में किन्हीं दो के गुणनखंड निकालिये—

(i) $4x^4 + 3x^2 + 9$ (ii) $x^3 + 3x^2 - x - 2$

(iii) $x^6 + 5x^3 + 4$

अथवा, यदि $(a+b+c)^2 = 3(ab+ac+bc)$, तो सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 3$$

2. नीचे लिखे समीकरणों में से किसी एक को हल कीजिये—

(i) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6}$

(ii) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5, \quad \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=12$

(iii) $2x^2-x-210=0$

अथवा, 'a' का मूल्य निकालिये जिससे,

$$4x+8x^{\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}}+4x^{-1}+x^{-2}+a$$ एक पूर्ण वर्ग बन सके।

5. सरल कीजिये— $\sqrt[bc]{\frac{x^b}{x^c}} \times \sqrt[ca]{\frac{x^c}{x^a}} \times \sqrt[ab]{\frac{x^a}{x^b}}$

अथवा, यदि $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, तो सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{3(x+y+z)^2}{(a+b+c)^2}$$

4. किसी एक भिन्न के अंश में एक जोड़ने से उसका मान एक हो जाता है। और जब अंश में से एक घटाया जाता है और हर में 2 जोड़ा जाता है, तो भिन्न $\frac{1}{3}$ हो जाता है। उस भिन्न को निकालिये।

अथवा, निम्नलिखित का ल० स० निकालिये—

$$6x^2-x-1,\ 3x^2+7x+2 \text{ और } 2x^2+3x-2$$

H. S. 1965 A

1. निम्नलिखित में से किन्हीं दो के गुणनखंड निकालिये—

(i) x^4-23x^2+1 (ii) $(x^2+3x+6)(x^2+3x-y)-32$

(iii) $x^2-bx-a^2+3ab-2b^2$

अथवा, यदि $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{ca}-\frac{1}{ab}=0$

सिद्ध कीजिये कि $a=b=c$

2. नीचे लिखे समीकरणों में से किसी एक को हल कीजिये।

(i) $\frac{x-a}{x+a}-\frac{x+a}{x-a}+\frac{2a}{x^2-a^2}=0$

(ii) $\left.\begin{array}{l}\frac{5}{x}+2y=3\\ \frac{3}{x}+4y=4\frac{3}{5}\end{array}\right\}$ (iii) $\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+3}{x-3}=\frac{2(x+4)}{x-4}$

अथवा, वर्गमूल निकालिये—

$$x^6+\frac{1}{x^6}+6\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+15\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+20$$

3. मान निकालिये—

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} \text{ जहाँ } x=\frac{2ab}{b^2+1}$$

अथवा, यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, तो सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$$

4. A और B की उम्र में 9 और 5 का अनुपात है। 23 वर्ष पूर्व उनकी उम्र का अनुपात 10 और 3 का था। प्रत्येक की उम्र ज्ञात कीजिये।

अथवा, $4a^4+32a^3+72a^2+44a+8$ और $6a^4+54a^3+138a^2+78a+12$ का म० स० निकालिये।

H. S. 1965 S

1. निम्नलिखित का लगातार गुणनफल निकालिये—

$$x+y+z,\ x+y-z,\ x-y+z,\ y+z-x$$

अथवा, यदि $a+b+c=15$, $ab+ac+bc=75$,

तो $a^3+b^3+c^3-3abc$ का मान निकालिये।

2. नीचे लिखे व्यंजकों में किन्हीं दो के गुणनखंड निकालिये—

(i) $x^2-2x-323$ (ii) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$
(iii) x^6-64

अथवा, निम्नलिखित का ल० स० निकालिये—

$$6x^2-x-1,\ 3x^2+7x+2,\ 2x^2+3x-2$$

3. नीचे लिखे समीकरणों में से किसी एक को हल कीजिये—

(i) $4x+\frac{3}{y}=9 \qquad 3x+\frac{6}{y}=8$

(ii) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}=0$

(iii) $(x-1)(x+2)=10$

अथवा, यदि $x=3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}$ हो, तो सिद्ध कोजिये कि $3x^3+9x=8$.

4. दो अंक की संख्या है। दहाई के स्थान का अंक इकाई के स्थान के अंक से बड़ा है। जब अंक उलट दिये जाते हैं तो नयी संख्या मूल संख्या के $\frac{3}{8}$ भाग के बराबर होती है। मूल संख्या निकालिये।

अथवा, यदि $9x^4+mx^3+nx^2-10x+1$ एक पूर्ण वर्ग हो तो m और n का मान निकालियें।

H. S. 1966 A

1. निम्नलिखि में किन्हीं दो के गुणनखंड निकालिये—

(i) $4x^4+81$ (ii) $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+13$

(iii) $a^2+b^2-c^2+2ab+a+b+c$

अथवा, यदि $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$, तो प्रमाणित कीजिये कि

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3$$

2. नीचे लिखे समीकरणों में किसी एक को हल करें—

(i) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}=16$

(ii) $x+y=2xy;\ x-y=xy$ (iii) $2x^2+x-6=0$

अथवा 'a' का क्या मान हो कि

$4x+8x^{\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}}+4x^{-1}+x^{-2}+a$ एक पूर्ण वर्ग बन जाय।

3. दो अंकों की किसी संख्या के अंकों का योग 8 है। यदि उस संख्या में 18 जोड़ दिया जाय तो अंक उलट जाते हैं तो वह संख्या मालूम कीजिये।

अथवा, ग्राफ के द्वारा हल कीजिये—

$$3x+2y=9 \qquad y-3x=0$$

यदि $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ हो, तो प्रमाणित कीजिये कि

$$(b+c)(b+d)=(c+a)(c+d)$$

अथवा, लघुतम समापवर्त्य निकालिये—
$x^2 - 3x + 2$, $x^2 + x - 6$ और $x^3 + 2x - 3$

H. S. 1966 S.

1. नीचे लिखे व्यंजकों में किन्हीं दो के गुणनखंड निकालिये—
(i) $x^4 + 2x^2 - 3$. (ii) $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$
(iii) $x^3 - x^2 - x - 1$.

अथवा, यदि $x = b + c$, $y = c + a$ और $z = a + b$ तो साबित कीजिए कि $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

2. नीचे लिखे समीकरणों में से किसी एक को हल कीजिये—

(i) $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-7}$

(ii) $\frac{2}{x} + \frac{7}{y} = 29$ $\quad \frac{5}{x} - \frac{6}{y} = 2$

(iii) $6x^2 + 5x - 4 = 0$

अथवा, निम्नलिखित व्यंजकों का वर्गमूल निकालिये—

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

3. सरल करें— $bc\sqrt{\frac{x^b}{x^c}} \times ca\sqrt{\frac{x^c}{x^a}} \times ab\sqrt{\frac{x^a}{x^b}}$

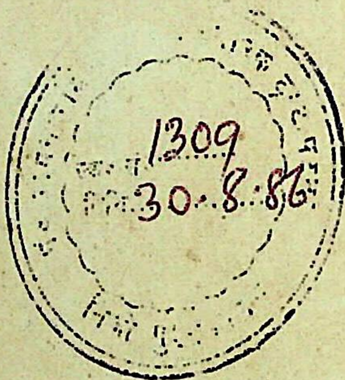
अथवा, यदि a, b, c और d संलग्न समानुपाति हों, तो सावित कोजिये कि

$$a : b = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} : \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

4. पिता की उम्र अपने पुत्र की उम्र की तिगुनी है। 12 वर्षों के बाद पिता की उम्र पुत्र की उम्र की दुगुनी हो जाती है। तो दोनों की वर्त्तमान उम्र मालूम कीजिये।

अथवा, नीचे लिखे व्यंजकों का म० स० निकालिये—
$x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ और $x^3 + 8x^2 + 21x + 18$

॥ इति ॥


1309
30.8.86


1309
30.8.86